Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Elena Celledoni, tlf. 93541, mobil 48238584

EKSAMEN I FAG MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Fredag 3. juni 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: C – Rottmann formelsamling.
Enkel kalkulator (HP 30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller i uke 24.

Oppgave 1

La t være et reell tall og se på matrisen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Drøft hvordan $\operatorname{rank}(A_t)$ variere med t.

b) For hvilket t har ligning systemet

$$A_t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-t \\ -t \\ 2t-1 \end{bmatrix}$$

1. nøyaktig en løsning
2. ingen løsning
3. uendelig mange løsninger.

Oppgave 2
Betrakt de lineære transformasjonene

$$T_1 : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3, \qquad T_1(p) = xp(x),$$

og

$$T_2 : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2, \qquad T_2(p) = \frac{dp(x)}{dx},$$

der $\mathbf{P}_2$ er polynomene i en variable x av grad mindre eller lik 2 og $\mathbf{P}_3$ er polynomene i en variable x av grad mindre eller lik 3.

a) Finn inverse av $T_2 \circ T_1$,

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} : \mathcal{R}(T_2 \circ T_1) \to \mathbf{P}_2,$$

der $\mathcal{R}(T_2 \circ T_1)$ er rekkevidde til $T_2 \circ T_1$.

b) Betrakt $B := \{1, x-1, (x-1)^2\}$ basis av $\mathbf{P}_2$ finn matrisen $[T_2 \circ T_1]_B$.

c) Finn rang og nullitet til $T_2 : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2$.

Oppgave 3
Matrise

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

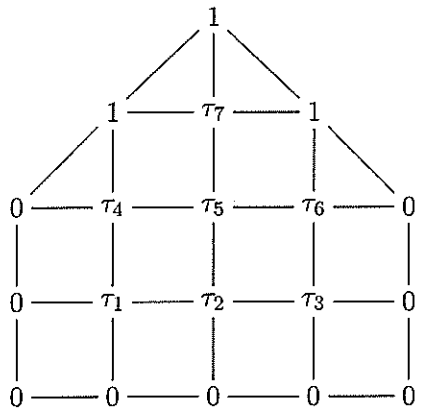
er gitt.

a) Diagonaliser A.

b) Finn løsning $y(t)$ til det lineære differensjalligningsystemet

$$y' = Ay, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4
Finn en tilnærmelse til likevektstemperaturfordeling i den tynne platen fordelt med følgende gitter:



der τ_i er den ukjente temperaturen i punkt i, og temperaturen er gitt i randpunktene.

a) Sett opp det lineære ligningsystemet, $A\mathbf{t} = \mathbf{b}$ som gir løsning $\mathbf{t} = [\tau_1, \ldots, \tau_7]^T$ ved bruk av diskretmiddelverdiegenskapet. Utfør to iterasjoner av Jacobi metode for å løse systemet. Ta

$$\mathbf{t}^{(0)} = [0, \ldots, 0]^T,$$

som initial tilnæermelse.

Oppgave 5

La A være en $n \times n$ sjev-hermittsk matrise, dvs slik at $A^* = -A$.

a) Vis at egenverdiene til A er rene immaginare tall.