Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Truls Fretland (73 55 89 87)

EKSAMEN I MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Bokmål
Tirsdag 23. mai 2006
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 13. juni 2006

Hjelpemidler:
Rottman formelsamling. Enkel kalkulator (HP30S)

Oppgave 1 Gitt vektoren $\mathbf{b}$ og de to radekvivalente matrisene A og B:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Finn rang(A) og dimensjonen til nullrommet til A. Hva er $\dim(R(A))$, når $R(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2\}$?

b) Finn en basis for kolonnerommet til A, $R(A)$, og en basis for nullrommet til A^T, $\text{Null}(A^T)$.

Gitt indreproduktrommet $\mathbf{R}^4$ med det euklidske indreproduktet.

c) Bruk minste kvadraters metode til å finne ligningen for den rette linja, $y = ax + b$, som passer best til datasettet gitt i Tabell 1. Finn projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A.

d) Vis at $\mathbf{b} - A\mathbf{x}' \in \text{Null}(A^T)$, der $\mathbf{x}'$ er minste kvadraters løsning funnet i oppgave c).

x	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Tabell 1: Datasett

e) Finn en ortogonal basis for $R(A)$, kall denne B. Finn en ortogonal basis for $\text{Null}(A^T)$, kall denne B'. Forklar (kort) hvorfor $B \cup B'$ danner en ortogonal basis for $\mathbf{R}^4$.

Oppgave 2 Matrisen M gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

har to distinkte egenverdier.

a) Finn egenverdiene og en basis for de to egenrommene E_1 og E_2 til M.

b) Finn en matrise P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen D, slik at $P^{-1}MP = D$.

c) En kantine serverer kjøtt-, fiske- og vegetar-måltider til 100 faste middagsgjester. Kokken er en noe spesiell hobbymatematiker og ønsker å forutsi hvordan middagsgjestene fordeler seg på de ulike rettene. Kokken har observert følgende: De som spiser vegetar spiser vegetar neste dag. Av de som spiser kjøtt spiser 80% kjøtt neste dag og 20% fisk neste dag. Av de som spiser fisk spiser 80% fisk neste dag og 20% kjøtt neste dag. Hvis det en gitt dag er 10 personer som spiser vegetar, 80 som spiser kjøtt og 10 som spiser fisk, hvordan fordeler disse seg da etter 5 dager?

Oppgave 3 La P_2 være vektorrommet av polynomer av grad mindre eller lik 2. La $V = \{p(x) \mid p(x) = a - ax + bx^2 \in P_2, a, b \in \mathbf{R}\}$ være et vektorrom.

a) Vis at V er et underrom av P_2.

La $T : V \to W$ være en transformasjon definert ved

$$T(p) = (1 + x)p(x),$$

der W er et underrom av P_3.

b) Vis at T er en lineær transformasjon. Finn billedmengden til T, $R(T)$.

Betrakt nå indreproduktrommene V og W, med indreprodukt definert ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx. \tag{1}$$

c) Gitt basisen $B = \{(1-x), x^2\}$ for V og basisen $B' = \{1-x^2, -1+5x^2+4x^3\}$ for W. Vis at mengden B' er ortogonal med hensyn på indreproduktet gitt av (1). Finn matrisen til T, $[T]_{B',B}$, og bruk denne til å regne ut $T(-1+x-4x^2)$.

Oppgave 4 La A være en kompleks skjev-hermitsk matrise. Matrisa kalles skjev-hermitsk hvis $A^* = -A$, der A^* er den konjugert-transponerte ($A^* = \bar{A}^T$).

a) Vis at iA er Hermitsk, der $i = \sqrt{-1}$.

b) Vis at A er unitært diagonaliserbar.