Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Carl Fredrik Berg (975 05 585)

EKSAMEN I MA1202 OG MA6202
LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Bokmål
Onsdag 30. mai 2007
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Enkel kalkulator (HP30S)

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn $\text{rank}(A)$ (rangen til A), og gi en basis for kolonnerommet til A.

b) Finn $\text{null}(A)$ (nulliteten til A). Er vektoren $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ i nullrommet til A?

Oppgave 2 Se på mengden $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ hvor operasjonene *addisjon* og *skalarmultiplikasjon* er gitt ved standard matriseaddisjon og multiplikasjon med reelle tall:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{bmatrix}$$

$$r \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ -rb & ra \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

a) Vis at V med de gitte operasjonene er et reellt vektorrom. (Det anses som kjent at mengden $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ av reelle 2×2-matriser med standard operasjoner er et reellt vektorrom.)

b) Finn en basis for V og finn dimensjonen $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ til det reelle vektorrommet V.

Oppgave 3 La lineærtransformasjonen $T\colon P_2 \to P_1$ være gitt ved

$$T(p(x)) = p'(x+1) \left(= \frac{dp(x+1)}{dx} \right)$$

Her er $P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ det reelle vektorrommet bestående av alle polynom av grad mindre eller lik 2, og $P_1 = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ det reelle vektorrommet bestående av alle polynom av grad mindre eller lik 1, hvor både P_2 og P_1 har standard addisjon og skalarmultiplikasjon.

La $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ og $\mathcal{B}' = \{1+x, 1-x\}$ være basiser for henholdvis P_2 og P_1.

a) Finn matrisen $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ til T ($[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ i henhold til lærebokas notasjon), og finn $T(2x^2 - 4)$ ved å bruke $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

b) Avgjør om T er 1-1 (injektiv), og finn bildet (rekkevidden) $R(T)$ til T.

Oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og basis for de tilhørende egenrommene til matrisen A.

b) Finn en matrise P som diagonaliserer A og den tilhørende diagonalmatrisen D slik at $P^{-1}AP = D$. Regn ut A^{97} og A^{136}.

c) Anta at vi har følgende system av reelle funksjoner:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2f(x) & - & 5g(x) & + & 3h(x) & = & f'(x) \\ & - & g(x) & & & = & g'(x) \\ -f(x) & - & 5g(x) & + & 2h(x) & = & h'(x) \end{array}$$

Bruk diagonaliseringen over til å bestemme funksjonene $f(x), g(x)$ og $h(x)$ når $f(0) = 1, g(0) = -1$ og $h(0) = 2$.

Oppgave 5

La $\langle -, - \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ være et generelt kompleks indreprodukt. Hvorfor er $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$ for alle $u \in V$?