Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Eldar Straume (73 59 66 83)
(99 41 03 89)

EKSAMEN I MA1202/MA6202 Lineæralgebra med anvendelser

Bokmål
Lørdag 31. mai 2008
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode D): Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Enkel kalkulator (HP 30S)

Sensurdato: 21. juni 2008

Oppgave 1 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Bestem rang og nullitet til hver av de to matrisene A og $A^T A$.

b) En størrelse y er antatt å være en lineær funksjon av x, $y(x) = r + sx$ hvor parametrene skal estimeres ved å benytte målte verdier av y for $x = 1, 2, 3, 4$, se tabellen. Estimer r og s ved å benytte minste kvadraters metode.

x	1	2	3	4
y	1.1	1.5	2.08	2.83

Oppgave 2 Vi ser på vektorrommet $\mathcal{F}$ som består av reelle funksjoner definert på intervallet $[0, 2\pi]$ og setter

$$\mathcal{A} = \{1, x, \sin(x), \cos(x)\}, \quad \mathcal{B} = \{1, \sin(x), \cos(x)\}.$$

La V være underrommet av $\mathcal{F}$ med basis $\mathcal{A}$ og W underrommet med basis $\mathcal{B}$. Vi definerer lineæravbildningene $D : V \to W$ og $J : W \to V$ som følger:

$D(f(x)) = \frac{df}{dx}(x), \quad J(g(x)) = \int_0^x g(t)\,dt.$

a) Bestem matrisene $[D]_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ og $[J]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ som beskriver lineæravbildningene D og J med hensyn på $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$.

b) Ved å sammensette de to lineæravbildningene J og D får vi to nye lineæravbildninger:

$D \circ J : W \to V \to W$
$J \circ D : V \to W \to V$

Finn matrisene $[D \circ J]_{\mathcal{B}}$ og $[J \circ D]_{\mathcal{A}}$.

Oppgave 3 En flue har rotet seg inn i et kryss og surrer forvirret rundt mellom 5 ulike områder (se figur).

	1	
2	3	4
	5	

Vi antar at flua flyr fra et område til et annet hvert sekund. Hvis flua befinner seg i midten (område 3) vil den velge blindt mellom hvert av de fire andre områdene og dra dit (sannsynligheten er altså $1/4$ til hvert av de fire områdene). Hvis den derimot står i område $1, 2, 4$ eller 5, vil den dra inn til midten med sannsynlighet 1.

a) Skriv opp Markov-matrisa M som beskriver denne prosessen.

Det oppgis at $1, -1, 0$ er egenverdiene til M.

b) Bestem nulliteten (nullity) til M, begrunn hvorfor M er diagonaliserbar og vis at $M^3 = M$.

c) La oss se på en situasjon der en stor populasjon av fluer slippes inn til område 3 på et tidspunkt $t = 0$. Hver flue forflytter seg mellom de fem områdene som beskrevet over. Hva blir fordelingen av fluer på de fem områdene etter 1001 sekunder ($t = 1001$)?

Oppgave 4 La $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ være en vektor i $\mathbb{R}^3$ avhengig av tiden t, slik at følgende system av differensialligninger er oppfyllt:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Finn løsningen for systemet som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = (1, 1, 1)^T$
(Det oppgis at egenverdiene til matrisa er små heltall.)

Oppgave 5 Vi ser på ortogonale matriser på formen

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad , \theta \in \mathbb{R}$$

a) Begrunn hvorfor A_θ er unitært diagonaliserbar (betraktet som matrise over de komplekse tall) og finn en unitær diagonalisering av A_θ

$$P^{-1} A_\theta P = P^* A_\theta P = D$$

hvor P er uavhengig av θ.

b) Definer

$$B_\theta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_\theta.$$

Sjekk at $A_\theta \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] A_{-\theta} = B_{-\theta}$ og begrunn hvorfor $A_{\theta_1} A_{\theta_2} = A_{\theta_1 + \theta_2}$. Bruk dette til å finne en ortogonal diagonalisering av B_θ.