Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lars Sydnes (93 03 56 85 / 73 59 17 95)

EKSAMEN I MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser.

Bokmål
Torsdag 28. mai 2009
Tid: 09:00-13:00
Hjelpemidler: Kode D; bestemt enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X).

Oppgave 1 Betrakt de radekvivalente matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og lineæravbildningen $T_A \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ gitt ved multipikasjon med A.

a) Bestem rangen og nulliteten til matrisen A.

b) Finn en basis for kjernen (kernel) $\ker(T_A)$ og bildet (range) $R(T_A)$ til T_A.

c) Finn en ortonormal basis for $\mathrm{R}(T_A)$.

Oppgave 2

a) I en matematisk modell for et naturlig fenomen antar vi at størrelsen y er en lineær funksjon av størrelsen x. Det betyr at det skal finnes reelle konstanter a, b slik at

$$y = ax + b.$$

Bruk minste kvadraters metode til å bestemme verdier av a og b utifra måledataene

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \quad (x_2, y_2) = (1, 2) \quad (x_3, y_3) = (2, 1).$$

b) Se på en markovkjede med overgangsmatrise

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.75 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Anta at tilstandsvektoren ved tid 0, $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Finn tilstandsvektoren $\mathbf{p}_1$ ved tid 1.

Finn en stabil tilstandsvektor (steady state vector) for denne markovkjeden. Finnes det flere slike?

Oppgave 3 La P_n være vektorrommet av reelle polynomer i variabelen x av grad mindre enn eller lik n, og

$$T_1 \colon P_2 \to P_3 \quad \text{og} \quad T_2 \colon P_3 \to P_2$$

lineæravbildningene gitt ved

$$T_1(p(x)) = x \cdot p(x+1) \quad \text{når} \quad p(x) \in P_3 \quad \text{og} \quad T_2(q(x)) = q'(x) \quad \text{når} \quad q(x) \in P_2.$$

La så T være komposisjonen $T_2 \circ T_1 \colon P_2 \to P_2$.

a) Betrakt standardbasisen $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$ for P_2. La $A = [T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ være matrisen til T i basisen $\mathcal{S}$. Begrunn at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Begrunn at A er diagonaliserbar. Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for matrisen A.

c) Finn en basis $\mathcal{B}$ for P_2 bestående av egenvektorer for T.

Hva er matrisen $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ til T i basisen $\mathcal{B}$?

Oppgave 4 La $C[0,\pi]$ være vektorrommet av reelle kontinuerlige funksjoner på intervallet $[0,\pi]$. Vi bruker her de vanlige vektorromsoperasjonene på denne mengden: Punktivis addisjon og skalarmultiplikasjon.

a) Begrunn at formelen

$$\langle f, g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)dt$$

gir et indreprodukt på $C[0,\pi]$. Du behøver ikke argumentere grundig for positivitetsaksiomet.

b) Finn reelle konstanter a, b slik at integralet

$$\int_0^\pi (1 - a\sin(t) - b\sin(3t))^2\, dt$$

har minimal verdi.

Til nytte for studenter som ikke har kompetanse innen analyse oppgis følgende fakta:

- Funksjonene $\sin(t), \sin(3t)$ danner en ortonormal mengde.
- $\int \sin(at)dt = -\frac{1}{a}\cos(at) + C$.

Oppgave 5 Betrakt den reelle matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

a) Begrunn – uten å vise til en konkret diagonalisering – at matrisen A er unitært diagonaliserbar.

b) Finn en unitær matrise U som diagonaliserer A

Oppgave 6 La A være en reell $m \times n$-matrise.

a) Begrunn at A^TA er ortogonalt diagonaliserbar med egenverdier $\lambda \geq 0$.

b) Begrunn at A^TA og A har samme nullrom og samme rang.

c) La r = antallet egenverdier λ for A^TA slik at $\lambda > 0$, telt med multiplisitet.
Begrunn at $r = \text{rang}(A)$