UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENVITENSKAPELIGE HØYSKOLEN
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

Bokmål

EKSAMEN I MA08 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 1. juni 1995 Antall timer: 6

Antall vekttall:	5	Tillatte hjelpemidler:
Antall sider bokmål:	3	Utdelt kalkulator
Antall sider nynorsk:	3	
Antall vedlegg:	0	

Sensurdato: 22. juni 1995

Oppgave 1

La $t \in R$ og la

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Finn ut om matrisen A er inverterbar.
b) Finn rangen til matrisen A.
c) Finn en basis for løsningsrommet til $A\underline{x} = \underline{0}$.
d) Finn kolonnevektorer i A som danner basis for kolonnerommet til A.

Oppgave 2

La $W \subset R^4$ være løsningsrommet til likningssettet

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

a) Finn en basis for W.
b) Finn en ortonormal basis for W der en av basisvektorene er parallell med vektoren $\underline{v} = (1, -1, 1, -1)$. (Basisen skal være ortonormal med hensyn på det eulikdske indreproduktet for R^4.)
c) Finn den minste verdien av uttrykket

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

når $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Finn en matrise P som diagonaliserer A ortogonalt.
c) Overfør den kvadratiske likningen

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}y + 8 = 0$$

til standard form ved hjelp av koordinatskifte.
d) Tegn kjeglesnittet i oppgave c).
e) La $\underline{x}^T A \underline{x}$ være den assosierte kvadratiske formen til likningen for et kjeglesnitt.
Hvordan kan vi bare ved hjelp av egenverdiene til A se hvilket kjeglesnitt det er?

Oppgave 4

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom der $\dim V > 0$.
La $T : V \to V$ være en lineær transformasjon som er slik at

$$\ker(T) = R(T)$$

a) Vis at T ikke er enentydig.
b) Vis at dimensjonen til V er et partall.
c) La dimensjonen til V være et positivt partall.
Vis at det finnes en lineær transformasjon $T : V \to V$ som er slik at $\ker(T) = R(T)$.

Oppgave 5

Finn de komplekse løsningene av

$$iz^3 = 8$$

Skriv svaret både på formen $z = re^{i\theta}$ og på formen $z = a + bi$.
Plasser løsningene i det komplekse planet.