Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Eksamen I MA108 – Lineær Algebra

Antall timer: 6
Antall vekttal: 3. Antall vedlegg: 0
Antall sider bokmål: 3. Antall sider nynorsk: 0.
Ingen tillatte hjelpemidler.
Sensurdato: 23. juni 1997

2. juni 1997

La $\mathcal{R}$ og C stå for hhv. de reelle tall og de komplekse tall. Begrunn alle din svar.

Opgave 1 Sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Finn en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P slik at $P^{-1}AP = D$.

b) Løs systemet af differensiallikninger

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & 2x_3 & = & x_1' \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & x_2' \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & x_3' \end{array}$$

med initial betingelsene

$$x_1(0) = 2 \quad x_2(0) = 3 \quad x_3(0) = 0.$$

Opgave 2 Ole reiser til Danmark på ferie og kjøper boller hos en kjøpmann som ikke har prislister. Den første dagen kjøper han 3 rosinboller, 2 fløteboller og 1 tebolle, og må betale tilsammen 11 kr. Neste dag kjøper han 4 rosinboller, 1 fløtebolle og 2 teboller, og betaler tilsammen 15 kr. Den tredje dagen kjøper han kun et stykke av hver bolle og betaler tilsammen 6 kr. Hva koster de tre typene boller pr. stk?

Opgave 3 a) La $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Finn en inverterbar 2×2 matrise P, dens invers P^{-1} og en 2×2 diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) En land med 1.200.000 stemmeberettigede innbyggere har 2 partier X og Y, der i dag 800.000 stemmer på X og 400.000 på Y. Hvert år skifter 70% parti fra X til Y og 50% fra Y til X.

Hvordan blir fordelingen mellom partiene etter 3 år? Hvordan blir fordelingen i det lange løp?

Opgave 4 Identifisere de kjeglesnitt man får fra

$$x^2 + 2axy + y^2 = 1 - a^2$$

for forskjellige verdier av a.
Skisser kurvene man får for $a = 0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$.

Opgave 5 La V være et vektorrom over $\mathcal{R}$ med indreprodukt $\langle\, ,\, \rangle$, og la v_0 være en fast vektor av lengde 1 i V. La $T : V \to V$ være defineret ved $T(v) = \langle v, v_0 \rangle v_0$.

a) Vis at T er en lineær transformasjon.

b) Vis at $T^2 = T$.

c) Finn rangen av T.

d) Finn $\dim(\ker T)$.

e) Finn determinanten, $\det T$.

f) La v_1 være en vektor ikke proporsjonal med v_0. Vis at $v_1 - T(v_1)$ er ortogonal til v_0.

(Opgave 6 på neste side.)

Opgave 6 La A være en kompleks $n \times n$ matrise slik at $A^* = A$. La $\lambda \in \mathcal{C}$.

a) Vis at λ er et reelt tall hvis og kun hvis $\overline{\lambda} = \lambda$.

b) Vis at $\langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle$ når $v \in \mathcal{C}^n$.

c) Vis vha. a) og b) at egenverdiene av A er reelle tall.

La V være vektorrommet av alle *komplekse* funksjoner på formen $f(x) = a \sin x + b \cos x$, der a og b er vilkårlige komplekse tall og $x \in \mathcal{R}$. La $T : V \to V$ være lineær transformasjonen gitt ved $T(f) = if'$, der $f'(x) = a \cos x - b \sin x$ er derivaten av f.

d) Finn matrisen av T mhp. basisen $\{\sin x,\ i \cos x\}$.

e) Finn egenverdiene og egenvektorene av T.