Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Kari Hag
73 59 17 44

Eksamen i Lineær algebra, MNFMA 108
Tirsdag 2. juni 1998
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Utdelt lommekalkulator
Sensurdato: 23. juni 1998

Oppgave 1

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Vis at A har følgende reduserte trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hva er rangen til A?

Finn en basis for radrommet til A og søylerommet til A.

b) Bestem også en basis for nullrommet til A.

c) For hvilke α, β er ligningssystemet $A\mathbf{x} = [1, 0, \alpha, \beta]^T$ løsbart? Angi løsningsmengden.

d) Finn en ortonormal basis for søylerommet til A og bestem den minste verdien av

$$\|A\mathbf{x} - [1, 0, 0, 0]^T\|$$

når $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

Oppgave 2

a) Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,15 \\ -0,20 & 1,10 \end{pmatrix}.$$

Finn en invertibel matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) På en øde øy blir det satt ut $R_0 = 100$ rever og $H_0 = 100$ harer. Etter n måneder er det R_n rever og H_n harer. Vi antar følgende matematiske modell for variasjonen av R_n og H_n:

$$R_{n+1} = 0,70R_n + 0,15H_n,$$

$$H_{n+1} = -0,20R_n + 1,10H_n.$$

Hvordan går det da med revbestanden og harebestanden når $n \to \infty$?

Oppgave 3

Gitt matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Regn ut egenverdiene og egenvektorene til M. (Det oppgis at 2 er en egenverdi av multiplisitet 2.)

b) Gitt differensialligningssystemet

$$(\heartsuit) \qquad \mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

der $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, og A er en $n \times n$-matrise med n lineært uavhengige egenvektorer

$$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$$

svarende til egenverdiene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ikke nødvendigvis forskjellige). Utled formelen

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{p}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{p}_n$$

for den generelle løsning av ($\heartsuit$).

c) Finn den generelle løsning av differensialligningssystemet

$$\mathbf{x}' = M\mathbf{x}.$$

Oppgave 4

Finn a, b og c slik at kurven definert ved

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

er en ellipse med den største aksen langs vektoren $[3, 4]$ og av lengde 2, mens den minste aksen har lengden 1. (Hint: Innfør et passende $x'y'$-koordinatsystem.)

Oppgave 5

La $\mathcal{P}_3$ være vektorrommet av polynomer av grad høyst 3, og la $T\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ være avbildningen gitt ved $T(p) = p'$.

a) Begrunn at $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ er en basis for $\mathcal{P}_3$ og at T er en lineæravbildning.

b) Finn matrisen A til lineæravbildningen T med hensyn på basisen B (ordnet i rekkefølgen angitt i **a)**). Hva blir A^4?

Oppgave 6

Vi minner om at to $n \times n$-matriser A og B kalles *similære* dersom det fins en invertibel matrise P slik at $B = P^{-1}AP$. Vis følgende:

a) Similære matriser har samme rang og samme nullitet.

b) Similære matriser har samme karakteristiske polynom (og samme egenverdier).