Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Magnus Landstad
Telefon: 9 17 53

MNFMA 108, Lineær algebra
Bokmål
Tirsdag 1. juni 1999
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler
Sensur: Tirsdag 22. juni 1999

Oppgave 1

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s & 4 \\ 2 & 3s & 8+s \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}$$

Finn rank A for alle s.

b) For hvilke verdier av s og t har likningssystemet

$$\begin{aligned} x + sy + 4z &= 0 \\ 2x + 3sy + (8+s)z &= t-1 \\ sy + z &= -1 \end{aligned}$$

0, 1 eller ∞ mange løsninger?

Oppgave 2

a) Finn dimensjonen og en basis for løsningsrommet til systemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 6x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

b) La $a \in \mathbf{R}$. Hva er

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & a \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Oppgave 3

Bollerud Bakeri produserer loff og kneip. En har faste kontrakter på levering av 500 loff og 1000 kneip hver dag. Kapasiteten til brødbilen gjør at det kan leveres høyst 3000 brød hver dag. Bakeriet har bare en ovn som tar 300 loff pr. time eller 400 kneip pr. time. Arbeidsdagen er på 8 timer.

a) Sett opp ulikhetene disse forutsetningene gir og illustrer med en figur.

b) Fortjenesten er kr. 1,20 pr. loff og kr. 1,00 pr. kneip. Hvor mange loff og kneip må en bake hver dag for å få mest fortjeneste pr. dag?

Oppgave 4

La

$$M = \begin{bmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{bmatrix}$$

med $p, q \in [0, 1]$.

a) Vis at egenverdiene til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = p - q$ og finn en matrise P som diagonaliserer M.

b) Vis at hvis $|p - q| < 1$ vil

$$M^n \to \frac{1}{1+q-p} \begin{bmatrix} q & q \\ 1-p & 1-p \end{bmatrix} \text{ når } n \to \infty.$$

Oppgave 5

a) Finn en 2-grads kurve

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

som går gjennom punktene

$$(0,0)\ (1,0)\ (1,-2)\ (4,-2)\ (4,-6).$$

b) Benytt minste kvadraters metode til å finne den rette linje $y = ax + b$ som passer best til de 5 punktene i a).

Oppgave 6

La $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

Vis at A er unitær og finn en unitær matrise U slik at U^*AU er en diagonal-matrise.

Oppgave 7

La V være vektorrommet av alle $n \times n$-matriser og la

$$W = \{A \in V \mid trA = 0 \text{ og } A^T = A\}.$$

($trA = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}$ og A^T er den transponerte matrisen.)

a) Vis at W er et underrom av V.

b) Finn en basis for W når $n = 2$ og når $n = 3$.

c) Finn $\dim W$ for vilkårlig n.