Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lars Sydnes (93 03 56 85 / 73591795)

SEMESTERPRØVE I MA1202:
Lineær algebra med anvendelser

Mandag 9.mars
Tid: 15.15-16.45
Hjelpemidler: Kode D; bestemt enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X).

Oppgave 1 Se på matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A og R er radekvivalente. (Dette kan dere ta for gitt.)

a) Finn en basis for radrommet til A.

b) Finn en basis for kolonnerommet til A.

c) Hva er rangen til A? Kan du på en indirekte måte bestemme dimensjonen til nullrommet til A?

Vi kan se på ligningen $Ax = 0$ som et system av 4 ligninger i 5 ukjente. Hvor mange lineært uavhengige ligninger er det i dette systemet? Hvor mange parametere er det i den generelle løsningen?

d) Finn en basis for nullrommet til A.

Oppgave 2 Se på vektorene

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en basis for $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$.
(Tips: Studér kolonnene i matrisen A i oppgave 1.)

b) Finn koordinatene til vektoren $\mathbf{u}_5$ i den basisen du oppgav som svar på punkt a).

c) Er mengden $\{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ lineært uavhengig?

Oppgave 3

a) Bruk Gram–Schmidt–algoritmen til å finne en ortonormal basis $S = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ for kolonnerommet til matrisen A beskrevet i oppgave 1.

b) La $\mathbf{b} = (2, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. Beregn den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p} = \text{Proj}_{\text{Col}(A)}\mathbf{b}$ av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A.

Hva er koordinatene til $\mathbf{p}$ i basisen S?

c) (Nøtt?) La

$$M = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_4] \quad \text{og} \quad \mathbf{p} = \text{Proj}_{\text{Col}(M)}\mathbf{b},$$

projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til M. ($\mathbf{u}_i$ er definert i oppgave 2.)

Minstekvadratersløsningen til ligningssystemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er – som kjent – løsninger av ligningssystemet $M\mathbf{x} = \mathbf{p}$. Vi skal her se på dette ligningssystemet.

Vi kan skrive det på vektorform

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_4 = \mathbf{p},$$

der $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ er kolonnevektorene til M og $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Skriv denne ligningen ved hjelp av koordinatvektorer i basisen $S = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ funnet i oppgave 3.

Hvordan kan vi komme frem til denne ligningen ved hjelp av en QR-faktorisering av M?

Hva er minstekvadratersløsningen til det inkonsistente ligningssystemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$?