Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Lars Sydnes (93 03 56 85 / 73591795)

SEMESTERPRØVE I MA1202: Lineær algebra med anvendelser

Måndag 9.mars
Tid: 15.15-16.45
Hjelpemiddel: Kode D; bestemt enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X).

Oppgåve 1 Sjå på matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A og R er radekvivalente. (Dette kan de ta for gjeve.)

a) Finn ein basis for radrommet til A.

b) Finn ein basis for kolonnerommet til A.

c) Kva er rangen til A? Kan du på ein indirekte måte fastslå dimensjonen til nullrommet til A?

Vi kan sjå på likninga $Ax = 0$ som eit system av 4 likningar i 5 ukjende. Kor mange lineært uavhengige likningar er det i dette systemet? Kor mange parametrar er det i den generelle løysinga?

d) Finn ein basis for nullrommet til A.

Oppgåve 2 Sjå på vektorane

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn ein basis for Span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$.
(Tips: Sjå på kolonnene i matrisa A i oppgåve 1.)

b) Finn koordinatane til vektoren $\mathbf{u}_5$ i den basisen du gav som svar på punkt a).

c) Er mengda $\{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ lineært uavhengig?

Oppgåve 3

a) Bruk Gram–Schmidt–algoritmen til å finne ein ortonormal basis $S = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ for kolonnerommet til matrisa A (jfr. oppgave 1).

b) Lat $\mathbf{b} = (2, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. Rekn ut den ortogonale projeksjonen $\mathbf{p} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}\mathbf{b}$ av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A.

Kva er koordinatane til $\mathbf{p}$ i basisen S?

c) (Nøtt?) Lat

$$M = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_4] \quad \text{og} \quad \mathbf{p} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(M)}\mathbf{b},$$

projeksjonen av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til M. ($\mathbf{u}_i$ er definert i oppgåve 2.)

Minstekvadratsløysinga til likningssystemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er – som kjent – løysingar av likningssystemet $M\mathbf{x} = \mathbf{p}$. Vi skal her sjå på dette likningssystemet.

Vi kan skrive systemet på vektorform

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_4 = \mathbf{p},$$

der $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ er kolonnevektorane til M og $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Skriv denne likninga ved hjelp av koordinatvektorar i basisen $S = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ funne i oppgåve 3.

Korleis kan vi kom fram til denne likninga ved hjelp av ei QR-faktorisering av M?

Kva er minstekvadratsløysinga til det inkonsistente likningssystemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$?