Løysingsforslag, Øving 1

MA1202 Lineær algebra

5.1.15 Me skriv $\overline{x}$ når me ser på talet x som ein vektor, og berre x når me ser det som ein skalar. Me har operasjonane $\overline{x} + \overline{y} = \overline{xy}$ og $k\overline{x} = \overline{x^k}$. Me sjekkar at alle aksioma held.

1: $\overline{x} + \overline{y} = \overline{xy}$, og xy er også eit positivt reelt tal, så aksiom 1 held.

2 og 3 følgjer enkelt frå eigenskapane til multiplikasjon.

4: Talet 0 er ikkje med i mengda vår, og har heller ikkje den rette eigenskapen, men talet 1 fungerer som nullvektor. Altså set me $\mathbf{0} = \overline{1}$. Då har me $\mathbf{0} + \overline{x} = \overline{x \cdot 1} = \overline{x}$.

5: For å få dei negative vektorane til å fungera med nullvektoren vår, må me setja $-\overline{x} = \overline{\frac{1}{x}}$. Då får me $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{x} + \overline{\frac{1}{x}} = \overline{x \cdot \frac{1}{x}} = \overline{1} = \mathbf{0}$.

6: $k\overline{x} = \overline{x^k}$, og x^k er positivt, så aksiom 2 held.

7: $k(\overline{x} + \overline{y}) = k(\overline{xy}) = \overline{(xy)^k} = \overline{x^k y^k} = \overline{x^k} + \overline{y^k} = k\overline{x} + k\overline{y}$.

8: $(k+m)\overline{x} = \overline{x^{k+m}} = \overline{x^k x^m} = \overline{x^k} + \overline{x^m} = k\overline{x} + m\overline{x}$. Merk at i dei første ledda adderer me skalarar, i dei siste adderer me vektorar.

9: $k(m\overline{x} = k\overline{x^m} = \overline{(x^m)^k} = \overline{x^{mk}} = (km)\overline{x}$.

10: $1\overline{x} = \overline{x^1} = \overline{x}$.

Alle aksioma er oppfylte, så dette er eit vektorrom.

5.1.31 (1) Aksiom 1 og 5. (2) Hypotesen. (3) og (4) Aksiom 3 og 5.

5.2.2 a) Viss $A \neq 0$ er ei heiltalsmatrise, så er t.d. ikkje πA ei heiltalsmatrise, sidan π er eit irrasjonalt tal. Altså er det ikkje eit underrom.

b) Dette er eit underrom (sjekk aksiom 1 og 6).

c) Set $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ og$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Då har me $\det(A) = 0$ og $\det(B) = 0$, men $\det(A + B) = 1$. Altså er dette ikkje eit underrom.

5.2.11 a) Her kan me setja opp vektorane som kolonner i ei matrise og ta determinanten.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -6$$

Determinanten er ulik null, så vektorane er lineært uavhengige. Sidan det er tre av dei, utspenner dei $\mathbb{R}^3$

c) Her får me ei 3×4-matrise, så me kan ikkje ta determinanten, men Gauss-eliminasjon gir

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dermed er systemet konsistent for alle vektorar i $\mathbb{R}^3$, så dei oppgitte vektorane spenner ut $\mathbb{R}^3$.