Løysingsforslag, Øving 3

MA1202 Lineær algebra

5.4.21 a) Kall vektoren me skal leggja til $v_3 = (a, b, c)$. For å få ein basis må me ha

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & -2 & b \\ 3 & -2 & c \end{pmatrix} = 0$$

Me har

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & -2 & b \\ 3 & -2 & c \end{pmatrix} = 2a + b,$$

og av det ser me at me ikkje kan ha både a og b lik 0, så dei mulege standard-basisvektorane er $(1, 0, 0)$ og $(0, 1, 0)$.

5.5.4 a)

$$x = r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$x = r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

5.5.6 Gauss-eliminasjon gir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Frå dette løyser me $Ax = 0$ og får $x = r \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Altså utgjer $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein basis for nullrommet.

5.5.8 Me tek dei to radene med leiande 1 i R: $(1, 4, 5, 2)$ og $(0, 1, 1, \frac{4}{7})$ er ein basis for radrommet.

5.5.9 R har leiande 1 i dei to første kolonnene, så me tek dei to første kolonnene i A: $(1, 2, -1)$ og $(4, 1, 3)$ er ein basis for kolonnerommet.

5.5.10 Me transponerer og reduserer A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Me har leiande 1 i dei to første kolonnene, så me tek dei to første kolonnene i A^T: $(1, 4, 5, 2)$ og $(2, 1, 3, 0)$ er ein basis for radrommet.

5.6.2 $\text{rank}(A) = 2$ (dette er dimensjonen til radrommet som me fann i 5.5.8), $\text{nullity}(A) = 2$ (dette er dimensjonen til nullrommet som me fann i 5.5.6).

5.6.3 Antal leiande variablar er 2 (rangen) og antal parametrar er 2 (nulliteten).

5.supp.6 Lat B vera matrisa der $v_1, \dots, v_n$ er kolonnevektorane: $B = [v_1|v_2|\dots|v_n]$. Då har me at

$$AB = [Av_1|Av_2|\dots|Av_n].$$

Viss $Av_1, Av_2, \dots, Av_n$ skal vera lineært uavhengig må me ha $\det(AB) \neq 0$. Sidan $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ (Teorem 2.3.4) er dette berre muleg viss $\det(A) \neq 0$, det vil seia at A må vera inverterbar.