Løysingsforslag, Øving 4

MA1202 Lineær algebra

5.6.9 Sjå eksempel 5 i boka.

5.supp.2 Me finn først determinanten:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & s\\ 1 & s & 1\\ s & 1 & 1\end{pmatrix} = -s^3 + 3s - 2$$

Me set denne lik 0 og løyser likninga:

$$-s^3 + 3s - 2 = 0 \Rightarrow s = 1, s = -2$$

Dette betyr at viss $s \neq 1$ og $s \neq -2$ så er determinanten ulik null, altså har me berre den trivielle løysinga. Dermed er nullrommet berre origo.

Så set me $s = 1$:

Då er matrisa radekvivalent med

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

altså har den rang 1 og nullrommet må vera 2-dimensjonalt. Altså er det eit plan.

Til slutt set me $s = -2$:

Då er matrisa radekvivalent med

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

altså har den rang 2 og nullrommet er 1-dimensjonalt. Det er altså ei linje.

5.supp.5 a) Set opp eit likningssystem $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = v$, set inn dei kjende vektorane og løys for k_1, k_2 og k_3. Vel to av dei uendeleg mange løysingane.

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ er ei lineært avhengig mengd, og dermed ikkje ein basis.

5.supp.15 Lat $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Sidan S er ein basis kan u skrivast på ein unik måte som $u = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \ldots + x_n s_n$ der $x_1, \ldots, x_n$ er reelle tal. Me skriv då $(u)_S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Tilsvarande har me $v = y_1 s_1 + \ldots + y_n s_n$ og $(v)_S = (y_1, \ldots, y_n)$.

Me får då

$$u + v = x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n + y_1 s_1 + \ldots + y_n s_n = (x_1 + y_1)s_1 + \ldots + (x_n + y_n)s_n$$

$$(u + v)_S = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

På den andre sida har me

$$(u)_S + (v)_S = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Altså har me $(u + v)_S = (u)_S + (v)_S$.

b) løysest på tilsvarande måte.

6.1.6 Rekn ut kvar side for seg, og sjekk at svaret vert det same. Sjå fasit i boka.

6.1.2 a) -2 b) 62 c) -74 d) 8 e) 0.

6.1.6 b) $\langle u, v\rangle = -42$

6.1.10 I kvar oppgåve bruker me at $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle}$ med det oppgitte indreproduktet.

a) $\|w\| = \sqrt{10}$

b) $\|w\| = \sqrt{3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{21}$

c) $\|w\| = 5\sqrt{5}$

6.1.11 Her bruker me at $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$, igjen med det oppgitte indreproduktet for kvar oppgåve (fasit i boka).

6.1.23 Me må sjekka at det oppgitte produktet oppfyller alle aksiom for indreprodukt. Sjekkar først om $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$:

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p(1)q(1) = q(0)p(0) + q(\frac{1}{2})p(\frac{1}{2}) + q(1)p(1) = \langle q, p\rangle$$

Sjekkar så om $\langle p_1 + p_2, q\rangle = \langle p_1, q\rangle + \langle p_2, q\rangle$:

$$\langle p_1 + p_2, q\rangle = (p_1(0) + p_2(0))q(0) + (p_1(\frac{1}{2}) + p_2(\frac{1}{2}))q(\frac{1}{2}) + (p_1(1) + p_2(1))q(1) =$$

$$p_1(0)q(0) + p_1(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p_1(1)q(1) + p_2(0)q(0) + p_2(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p_2(1)q(1) = \langle p_1, q\rangle + \langle p_2, q\rangle$$

Sjekkar at $\langle kp, q\rangle = k\langle p, q\rangle$ for eit reelt tal k:

$$\langle kp, q\rangle = kp(0)q(0)+kp(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2})+kp(1)q(1) = k(p(0)q(0)+p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2})+p(1)q(1)) = k\langle p, q\rangle$$

Til slutt sjekkar me at $\langle p, p\rangle \geq 0$ og $\langle p, p\rangle = 0 \Leftrightarrow p = 0$:

$$\langle p, p\rangle = p(0)^2 + p(\frac{1}{2})^2 + p(1)^2 \geq 0$$

sidan alle tre ledd er positive. Vidare må alle tre ledda vera 0 dersom summen skal bli lik null, men det einaste andregradspolynomet med meir enn to nullpunkt er 0.

Det oppgitte produktet oppfyller alle aksioma, altså er det eit indreprodukt på P_2.

b) I P_3 har me polynomet $p(x) = x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$ som gir $\langle p, p\rangle = 0$, altså held ikkje det siste aksiomet. Det er altså ikkje eit indreprodukt på P_3.