Løysingsforslag, Øving 5

MA1202 Lineær algebra

6.1.16 f) Me brukar at $\|x\|^2 = x, x$ for ein kvar vektor x, og manipulerer så uttrykket ved hjelp av aksioma for indreprodukt.

$$\|u - 2v + 4w\| = \sqrt{\langle u - 2v + 4w, u - 2v + 4w\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle u, u - 2v + 4w\rangle - \langle 2v, u - 2v + 4w\rangle + \langle 4w, u - 2v + 4w\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + 4\langle u, w\rangle - 2\langle u, v\rangle + 4\langle v, v\rangle - 8\langle v, w\rangle + 4\langle u, w\rangle - 8\langle v, w\rangle + 16\langle w, w\rangle}$$

$$= \sqrt{\|u\|^2 - 4\langle u, v\rangle + 8\langle u, w\rangle + 4\|v\|^2 - 16\langle v, w\rangle + 16\|w\|^2}$$

Når me set inn dei kjende verdiane får me $\|u - 2v + 4w\| = \underline{\underline{\sqrt{881}}}$

6.1.21 På same måte får me her

$$\frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) = \frac{1}{4}(\langle u + v, u + v\rangle - \langle u - v, u - v\rangle)$$

$$= \frac{1}{4}(\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle - (\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle)) = \frac{1}{4} \cdot 4\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle$$

6.2.2 Viss vektorane skal vera ortogonale må me ha $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. Det gir eit inkonsistent likningssystem med tre likningar og to ukjende, altså finst ingen slike k og l.

6.2.18 b) span$\{v_1, v_2\}$ er radrommet til matrisa $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, så komplementet er nullrommet til A. Ved å løysa $Ax = 0$ finn me at $(0, 1, 0)$ og $(1, 0, 2)$ utgjer ein basis for komplementet.

6.2.19 u og v er ortogonale, altså har me $\langle u, v\rangle = 0$. Dei er einheitsvektorar, altså har me $\|u\| = \|v\| = 1$. Dermed får me

$$\|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2} = \sqrt{2}.$$

6.2.21 Me har at w er ortogonal med kvar vektor u_i, altså $\langle w, u_1\rangle = \langle w, u_2\rangle = \ldots = \langle w, u_r\rangle = 0$. Ein vilkårleg vektor u i span$\{u_1, \ldots, u_r\}$ kan skrivast som $u = k_1u_1 + \ldots + k_ru_r$ der k_i er skalarar. Dermed har me

$$\langle w, u\rangle = \langle w, k_1u_1 + \ldots + k_ru_r\rangle = \langle w, k_1u_1\rangle + \ldots + \langle w, k_ru_r\rangle =$$

$$k_1\langle w, u_1\rangle + \ldots + k_r\langle w, u_r\rangle = k_1 \cdot 0 + \ldots + k_r \cdot 0 = 0$$

altså er w og u ortogonale. Sidan u var ein vilkårleg vektor i span$\{u_1, \ldots, u_r\}$ betyr det at w er ortogonal med span$\{u_1, \ldots, u_r\}$.

6.3.2 a) $\|(2,0)\| = 2$, altså ikkje ortonormal.
b) Denne mengda er ortonormal.
c) Ikkje ortogonal, altså ikkje ortonormal.
d) $\|(0,0)\| = 0$, altså ikkje ortonormal.