Løysingsforslag, Øving 6

MA1202 Lineær algebra

6.4.9 span$\{w\}$ er det same som kolonnerommet til $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, altså matrisa som har$w$ som einaste kolonne. Me har då

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2)$$

Frå Teorem 6.4.4 får me då

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T = A \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot A^T = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

7.1.4 Den karakteristiske likninga vert $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$

Oppgåve 1 a) Sjå bevis for Teorem 6.2.6 i boka (s. 312-313)

b) Lat $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ vera ein basis for W, og lat $C = \{c_1, \ldots, c_n$ vera ein basis for $W^\perp$. Sidan B og C er basisar har me $b_i \neq 0$ og $c_i \neq 0$ for alle i. W og $W^\perp$ er ortogonale er det då ingen vektorar som er med i både B og C (altså $B \cap C =$).

Me vil visa at $B \cup C$ er ein basis for V. Frå Teorem 6.3.4 veit me at ein kvar vektor $v \in V$ kan skrivast som $v = v_1 + v_2$ der $v_1 \in W$ og $v_2 \in W^\perp$. Me kan skriva $v_1 = x_1 b_1 + \ldots + x_m b_m$ og $v_2 = y_1 c_1 + \ldots + y_n c_n$ der x_i og y_i er skalarar. Altså er $v = v_1 + v_2 = x_1 b_1 + \ldots + x_m b_m + y_1 c_1 + \ldots + y_n c_n$ ein lineærkombinasjon av vektorar i $B \cup C$, og $B \cup C$ spenner ut V.

Anta at $B \cup C$ er lineært avhengig. Då finst det ein vektor $u \in B \cup C$ som kan skrivast som ein lineærkombinasjon av andre vektorar i $B \cup C$. Me antek utan tap av generalitet at $u \in B$ og set $u = b_j = x_1 b_1 + \ldots + x_m b_m + y_1 c_1 + \ldots + y_n c_n$. Me har $b_j = b_j + 0$, og i følgje teorem 6.3.4 er det den einaste måten me kan skriva b_j som sum av ein vektor i W og ein i $W^\perp$. Sidan C er ein basis har me då $y_i = 0$ for alle i. Dermed kan b_j skrivast som ein lineærkombinasjon av andre vektorar i B, men det strid mot at B er ein basis. Altså er $B \cup C$ ein basis for V.

Då har me at $\dim(V) = m + n = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$.

c) Gitt ei $m \times n$-matrise A har me frå a) at $\text{Row}(A)^{\perp} = \text{Null}(A)$ som underrom av $\mathbb{R}^n$. Frå b) har me då

$$\dim(\text{Row}(A)) + \dim(\text{Null}(A)) = \dim(\text{Row}(A)) + \dim(\text{Row}(A)^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^n).$$

Sidan rangen er $\dim(\text{Row}(A))$, nulliteten er $\dim(\text{Null}(A))$ og $\dim(\mathbb{R}^n)$ har me då vist dimensjonsteoremet.

Oppgåve 2

$$\|u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\|^2 = \langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\rangle + \|\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\|^2$$

$$= \|u\|^2 - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\langle u, v\rangle + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle^2}\|v\|^2 = \|u\|^2 - 2\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}$$

$$\underline{\underline{\|u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\|^2 = \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}}}$$

Viss me no deler begge sider med $\|u\|^2$ får me

$$\frac{\|u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\|^2}{\|u\|^2} = 1 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2\|v\|^2}$$

Sidan ei norm alltid er positiv har me då

$$1 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2\|v\|^2} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2\|v\|^2} \Rightarrow \|u\|\|v\| \geq |\langle u, v\rangle|$$

altså har me vist Cauchy-Schwarz-ulikheita.