Løysingsforslag, Øving 7

MA1202 Lineær algebra

7.1.16 Lat $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Då er det karakteristiske polynomet til A

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

På den andre sida er

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A) + \det A = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

7.1.17 Me har den karakteristiske likninga frå 16 og brukar løysingsformelen for andregradslikningar:

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4 \cdot \det A}}{2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad - 4bc}}{2}$$
$$= \frac{(a+d) \pm \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 - 4bc}}{2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4bc}}{2}$$

(a) Uttrykket under rotteiknet er positivt, så me får to ulike reelle løysingar.
(b) Uttrykket under rotteiknet er 0, så $\lambda = \frac{a+d}{2}$ er den einaste løysinga.
(c) Uttrykket under rotteiknet er negativt, altså får me komplekse løysingar.

7.2.2 (a) Den karakteristiske likninga $\det(\lambda I - A) = 0$ gir $\lambda_{1,2} = 3$ og $\lambda_3 = 5$.
(b) Gauss-eliminasjon viser at $(3I - A)$ har rang 1 og $(5I - A)$ har rang 2.
(c) Dette betyr at $\lambda_{1,2}$ har både algebraisk multiplisitet og geometrisk multiplisitet lik 2, λ_3 har algebraisk multiplisitet og geometrisk multiplisitet lik 1. Altså er A diagonaliserbar.

7.3.6 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.3.11 A^TA er ei $n \times n$-matrise. Me har at $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$, altså er A^TA symmetrisk. I følgje Teorem 7.3.1 har då A^TA n ortonormale eigenvektorar.

7.supp.15 Sidan A har 3 distinkte eigenverdiar er den diagonaliserbar. Me set eigenvektorane inn som kolonnene i ei matrise $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ og eigenverdiane inn i ei diagonal matrise $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (Merk at kvar eigenverdi må stå i tilsvarande kolonne som den tilhøyrande eigenvektoren.) Då har me

$$P^{-1}AP = D$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$