Løysingsforslag, Øving 8

MA1202 Lineær algebra

7.supp.8 b)

Først viser me teoremet for diagonale matriser. Lat

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

vera ei diagonal matrise. Merk at $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er eigenverdiane til D, og at

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Lat

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

vera det karakteristiske polynomet til D. Når me set inn D i det karakteristiske polynomet og reknar saman, får me ei diagonal matrise der det $i$te elementet på diagonalen er $\lambda_i^n + c_1\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda_i + c_n$. Sidan λ_i er ein eigenverdi vert dette 0. Altså har me

$$D^n + c_1 D^{n-1} + \ldots + c_{n-1}D + c_n I = 0.$$

Lat no A vera ei diagonaliserbar matrise. Då finst ei matrise P slik at $D = P^{-1}AP$ er ei diagonal matrise med dei same eigenverdiane som A, og dermed det same karakteristiske polynomet. Me har at $A = PDP^{-1}$ og $A^k = PD^kP^{-1}$. Me har også at $Pc_nIP^{-1} = c_nPIP^{-1} = c_nPP^{-1} = c_nI$. Me set A inn i det karakteristiske polynomet:

$$A^n + c_1A^{n-1} + \ldots + c_{n-1}A + c_nI = PD^nP^{-1} + c_1PD^{n-1}P^{-1} + \ldots + c_{n-1}PDP^{-1} + Pc_nIP^{-1}$$

$$= P(D^n + c_1D^{n-1} + \ldots + c_{n-1}D + c_nI)P^{-1}$$

Sidan me allereie veit at D tilfredsstiller den karakteristiske likninga får me vidare

$$P(D^n + c_1D^{n-1} + \ldots + c_{n-1}D + c_nI)P^{-1} = P0P^{-1} = 0.$$

9.7.7 a)

Me skriv om likninga ved å fullføra kvadrata:

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153$$

$$= (9x^2 - 18x + 9) - 9 + (36y^2 - 144y + 144) - 144 + (4z^2 - 24z + 36) - 36 + 153$$

$$= 9(x-1)^2 + 36(y-2)^2 + 4(z-3)^2 - 36 = 0$$

Me får då translasjonslikningane $x' = x - 1$, $y' = y - 2$ og $z' = z - 3$, og den nye likninga for den kvadratiske flata vert

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{9} = 1.$$

Det betyr at flata er ein ellipsoide.

9.7.8 a)

Likninga kan skrivast som

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 150 = 0$$

der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 36 \\ 0 & 3 & 0 \\ 36 & 0 & 23 \end{pmatrix}.$$

Me må no finna ei matrise P som ortogonalt diagonaliserer A. Først finn me eigenverdiane til A.

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 25\lambda + 1250) = 0$$

gir løysingane $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 50$ og $\lambda_3 = -25$. Me finn så eigenvektorane. $(3I - A)p_1 = 0$ gir at $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er ein eigenvektor. Tilsvarande finn me $p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $p_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Desse eigenvektorane er ortogonale, men p_2 og p_3 må normaliserast: $p_2' = \frac{1}{5}p_2$, $p_3' = \frac{1}{5}p_3$. Dette gir oss ei ortogonal matrise

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

der $\det P = 1$. Me set no inn $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ i likninga og får

$$\mathbf{x}'^T P^T A P\mathbf{x}' + 150 = 0$$

$$\mathbf{x}'^T \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 150 = 0$$

$$3x'^2 + 50y'^2 - 25z'^2 = -150$$

$$-\frac{x'^2}{50} - \frac{y'^2}{3} + \frac{z'^2}{6} = 1$$

og dermed er flata ein tokappa hyperboloide.

Merk at viss du vel ei anna rekkjefølgje på kolonnene i P vil du få eit svar som liknar, men der x', y' og z' er bytta om. Det betyr ikkje at svaret er feil, berre at du har rotert slik at flata peikar langs ein anna akse.

b)

Her kan likninga skrivast som $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0$, der

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Me finn at

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ortogonalt diagonaliserer A, og set inn $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ i likninga:

$$\mathbf{x}'^T P^T A P \mathbf{x}' + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P\mathbf{x}' = 0$$

$$\mathbf{x}' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}' + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}' = 0$$

$$-y'^2 + z'^2 + x' = 0$$

$$x' = y'^2 - z'^2.$$

Altså er flata ein hyperbolsk paraboloide.