Løysingsforslag, Øving 9

MA1202 Lineær algebra

6.6.4 (a)
Me antek at A er ortogonal, då har me $A^{-1} = A^T$. Det gir

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T$$

Altså er A^T ortogonal.
(b)
Det normale systemet til $Ax = b$ vert

$$A^T Ax = A^T b$$

$$x = A^T b.$$

(Så kan ein jo lura på kva som var vitsen med med å finna det normale systemet når A er inverterbar.)

6.6.8 Overgangsmatrisa frå xyz-koordinat til $x'y'z'$-koordinat vert

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(a)

$$P \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(b)

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

6.6.14 Lat $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vera ei ortogonal matrise. Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ kan skrivast i polarkoordinat som (r, θ), og me har då $a = r\cos\theta$ og $c = r\sin\theta$. Sidan kolonnene i A er ortonormale har me $r = \| \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \| = 1$. Altså finst det ein θ slik at $\underline{\underline{a = \cos\theta}}$ og $\underline{\underline{c = \sin\theta}}$.

Sidan kolonnene i A er ortogonale har me $ab + cd = 0$. Vidare har me at $\det A = ad - bc = \pm 1$.

Viss $\det A = 1$ får me då

$$\cos\theta b + \sin\theta d = 0$$

$$-\sin\theta b + \cos\theta d = 1$$

som gir $b = -\sin\theta$ og $d = \cos\theta$, altså $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}}$.

Tilsvarande får me for $\det A = -1$

$$\cos\theta b + \sin\theta d = 0$$

$$-\sin\theta b + \cos\theta d = -1$$

som gir $b = \sin\theta$ og $d = -\cos\theta$, altså $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}}$.

7.2.15 A er diagonal, så me ser at den har eigenverdiane 0 og 1. 0 har algebraisk multiplisitet 2, sidan det er to nullar på diagonalen, og 1 har algebraisk multiplisitet 1. Geometrisk multiplisitet er dimensjonen til eigenrommet, og ved å rekna ut eigenromma finn me at 0 har geometrisk multiplisitet 2 og 1 har geometrisk multiplisitet 1. Geometrisk og algebraisk multiplisitet er den same for begge eigenverdiane, altså er A diagonaliserbar.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.2.16 Eigenverdien -2 har algebraisk og geometrisk multiplisitet 2, men eigenverdien 3 har algebraisk multiplisitet 2 og geometrisk multiplisitet 1. Altså er matrisa ikkje diagonaliserbar.