Løysingsforslag, Øving 10

MA1202 Lineær algebra

8.1.1 Lat $u = (u_1, u_2)$ og $v = (v_1, v_2)$ vera vektorar i $\mathbb{R}^2$ og k vera ein skalar. Då har me

$$T(u)+T(v) = T(u_1,u_2)+T(v_1,v_2) = (u_1+2u_2, 3u_1-u_2)+(v_1+2v_2, 3v_1-v_2)$$

$$= (u_1 + 2u_2 + v_1 + 2v_2, 3u_1 - u_2 + 3v_1 - v_2$$

$$T(u+v) = T(u_1+v_1, u_2+v_2) = (u_1+v_1+2u_2+2v_2, 3u_1+3v_1-u_2-v_2)$$

$$\Rightarrow T(u)+T(v) = T(u+v)$$

og

$$T(ku) = T(ku_1, ku_2) = (ku_1+2ku_2, 3ku_1-ku_2) = k(u_1-2u_2, 3u_1-u_2) = kT(u)$$

Altså er T ein lineær operator.

8.1.3 Lat $u \in V$. For $u \neq 0$ har me

$$T(-u) = \|-u\| = \|u\| = T(u) \neq -T(u)$$

Altså er T ikkje lineær viss V inneheld andre vektorar enn nullvektoren. (Dermot er T lineær viss $V = (0)$).

8.1.5 Lat A og A' vera matriser i M_{22} og k vera ein skalar. Då har me

$$T(A+A') = (A+A')B = AB + A'B = T(A) + T(A')$$

og

$$T(kA) = (kA)B = k(AB) = kT(A)$$

Altså er T lineær. (Merk at du ikkje treng å skriva ut matrisene.)

8.1.12

$$T(x_1, x_2) = (-4x_1 + 5x_2, x_1 - 3x_2)$$

$$T(5, -3) = (-35, 14)$$

8.1.16

$$T(2v_1 - 3v_w + 4v_3) = (-10, -7, 6)$$

8.2.1 a) Me vil vita om $(1,-4) \in R(T)$, altså om det finst $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ slik at $T(a,b) = (2a-b, -8a+b) = (1,-4)$. I så fall må likningane

$$2a - b = 1$$

$$-8a + b = -4$$

vera tilfredsstilt. Dette er eit konsistent system, så det finst minst ei løysing. Altså har me $\underline{\underline{(1,-4) \in R(T)}}$.

Tilsvarande finn me at $(5,0) \notin R(T)$ og $(-3,12) \in R(T)$.

8.2.2 a)

$$T(5,10) = (0,0) \Rightarrow (5,10) \in \ker T$$

b)

$$T(3,2) = (4,-16) \neq (0,0) \Rightarrow (3,2) \notin \ker T$$

c)

$$T(1,1) = (1,-4) \neq (0,0) \Rightarrow (1,1) \notin \ker T$$

8.2.6 a) $x + x^2 = T(1+x)$, altså er $(x+x^2) \in R(T)$

b/c) Same kva $p(x)$ er, så er konstantleddet i $xp(x)$ 0. Altså kan korkje $(1+x)$ eller $(3-x^2)$ liggja i $R(T)$.

8.2.22 Sidan $\{v_1, \ldots, v_n\}$ er ein basis kan ein vilkårleg vektor v skrivast på ein unik måte som

$$v = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n.$$

Me definerer T ved

$$T(v) = T(k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n) = k_1 w_1 + \ldots + k_n w_n.$$

Då er T ein veldefinert funksjon frå V til W, og $T(v_i) = w_i$ er tilfredsstilt. Det står att å sjekka at T er ein lineær transformasjon.

Lat $a = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$ og $b = b_1 v_1 + \ldots b_n v_n$ vera vektorar i V og c vera ein skalar. Me har

$$T(a+b) = T(a_1v_1+\ldots+a_nv_n+b_1v_1+\ldots b_nv_n) = T((a_1+b_1)v_1+\ldots+(a_n+b_n)v_n) =$$

$$(a_1+b_1)w_1+\ldots+(a_n+b_n)w_n = a_1w_1+\ldots a_nw_n+b_1w_1+\ldots+b_nw_n = T(a)+T(b)$$

og

$$T(ka) = T(ka_1v_1+\ldots+ka_nv_n) = ka_1w_1+\ldots+ka_nw_n = k(a_1w_1+\ldots+a_nw_n) = kT(a)$$

Altså er T ein lineær transformasjon.