Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1202 Lineær algebra med anvendelser, våren 2009
Øving 13

Innleveringsfrist er **fredag 8.mai** klokken **1600**. Denne øvingen veiledes ikke.

Oppdiktet oppgave

Vi ser her på et vektorrom V med basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. La $T\colon V \to V$ være lineæroperatoren slik at

$$T\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \quad T\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad T\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \tag{1}$$

a) Beregn $T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3)$ uttrykt som lineærkombinasjon av $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. (Beregn dette direkte av (1) og det at T er lineær.)

b) Hva er matrisen $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ til T i basisen $\mathcal{B}$?

c) La $\mathbf{v} \in V$ være vektoren med koordinater $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [k_1, k_2, k_3]_{\mathcal{B}}$. Beregn koordinatvektoren $[T\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ til $T\mathbf{v}$ i basisen $\mathcal{B}$.

Vi oppgir at $V = \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{v}_1 = [1/2\sqrt{2}, 0, 1/2\sqrt(2)]^T$, $\mathbf{v}_2 = [-1/2\sqrt{2}, 0, 1/2\sqrt(2)]^T$ og $\mathbf{v}_3 = [0, 1, 0]^T$. La $\mathcal{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ være standardbasisen for V.

d) Beregn basisskiftematrisen $[Id_V]_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$. Beregn den motsatte basisskiftematrisen $[Id_V]_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$

e) Beregn standardmatrisen[1] $[T] = [T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$ til T.

La oss nå anta at $V = \mathbb{C}^3$. (i.e, vi ombestemmer oss mhp. Vs identitet) Gjør det noen forskjell i forhold til det du regnet ut i punktene over?

Se på basisen $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ for V bestående av vektorene

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3}i \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3}i \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

f) Beregn matrisen til T i basisen $\mathcal{B}'$?

g) Finn en unitær matrise U slik at $U^*[T]U$ er diagonal.

h) Finn egenverdiene og egenvektorene til operatoren[2] T.

[1] Her kan det være bekvemmelig å bruke formelen $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = [T]_{\mathcal{S}\mathcal{B}}[Id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$ istedenfor den vanlige formelen. $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ finner du ved å beregne kolonnene $T\mathbf{v}_i$ i standardkoordinater.

[2] Om du vil: til matrisen $[T]$.

Ekstra

Finn løsningene av differensialligningene

$$y_1' = y_2 - y_3, \quad , y_2' = -y_1 + y_3, \quad y_3' = y_1 - y_2$$

med initialbetingelsene $y_1(0) = y_3(0) = 0$ og $y_3'(0) = -1$. (Tips: dere må finne $y_2(0)$. Utnytt den obligatoriske oppgaven til å diagonalisere systemet. Dere bør utnytte alle basisene $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{S}$. Hovedverktøyet bør være formler av typen $[S \circ S']_{X,Z} = [S]_{X,Y}[S']_{Y,Z}$.)