Demografi og lesliematriser

Basert på Anton & Rorres kap. 11.18

Lars Sydnes

Institutt for matematiske fag, NTNU

March 6, 2009

Demografi

Etymologi

"demos" $\approx$ "folk"

"grafi" $\approx$ "skrive" (gravere)

"demografi" $\approx$ "befolkningsbeskrivelse"

Hvilke aspekter ved befolkningen er det som beskrives?

- Alderssammensetning
- Geografi
- Økonomi
- et.c

Vårt fokus:

Alderssammensetning

Variabler i modell for befolkningsutvikling.

Vi studerer den kvinnelige delen av befolkningen

Det gir kanskje en bedre modell. (Dette utsagnet kan undersøkes empirisk, og har ingen a priori begrunnelse.)

Alderssegmenter

Den kvinnelige delen av befolkningen deles i alderssegmenter:
S_i: kvinner med alder i segmentet

$$[(i-1)(L/n), i(L/n)).$$

L og n velges utifra bekvemmelighetshensyn. Naturlige valg kan være $L = 100$år, $n = 20$. Alderssegmentene har da bredde på fem år.

$x_i^{(t)}$: Antall kvinner i segment S_i ved tid t.

Befolkningssammensetningsvektor:

$$\mathbf{x}^{(t)} = (x_1(t) \ldots, x_i^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)})$$

Diskretisering

Spørsmål:

Hvordan utvikler $\mathbf{x}^{(t)}$ seg med tiden?

Kontinuerlig tid $\rightarrow$ differensialligninger for $\mathbf{x}^{(t)}$.
Fordi det letter[1] regningen nøyer vi oss med å se på befolkningssammensetningen ved følgende tidspunkter:

$$t_k = k(L/n) \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Spørsmål:

Hvordan utvikler $\mathbf{x}^{(t_k)}$ seg med tiden?

[1] En studie av differensialligningene som oppstår er faktisk nøyaktig like enkel, og i tillegg mere nøyaktig. Det som letter regningen er å settte tidsstegene $t_k - t_{k-1}$ lik bredden på alderssegmentene.

Modell

Tilvekst av nye individer:

$$x_1^{t_k} = a_1 x_1^{(t_{k-1})} + \cdots + a_n x_n^{(t_{k-1})}$$

a_i er her fødselsraten for kvinner i segment S_i.

Aldring:

Kvinnene i segment S_{i-1} dør eller går opp i segment S_i med en sannsynlighet b_i:

$$x_i^{(t_k)} = b_i x_{i-1}^{(t_{k-1})} i = 2, 3, \ldots, n$$

Fundamental antagelse:

Ratene a_i, b_i er konstante.

Merk: $a_i \geq 0$, $0 < b_i \leq 1$.

På matriseform

Vi skriver dette som

$$\mathbf{x}^{(t_k)} = L\mathbf{x}^{(t_{k-1})},$$

der L er *lesliematrisen*

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Tidsutvikling

$$x_i^{(t_k)} = L^k x_i^{(t_0)}.$$

Vi behøver å forstå L^k.

Hva bestemmer utviklingen i det lange løp

Diagonalisering

Dette gir bl.a. en metode for å beregne potenser av matriser.

Vi må studere

- egenverdiene til L
- egenvektorene til L

Det karakteristiske polynom I

Lesliematrisen L har karakteristisk polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2}\cdots a_nb_1\cdots b_{n-1}$$

Dette kan vi skrive[2] som

$$p(\lambda) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - \cdots c_i\lambda^{n-1} - \cdots c_n$$

For $\lambda > 0$ kan vi skrive

$$p(\lambda) = \lambda^n(1 - q(\lambda)),$$

der

$$q(\lambda) = c_1\lambda^{-1} + \cdots + c_n\lambda^{-n}.$$

[2] $c_k = a_kb_1b_2\cdots b_{k-1}$. Merk: $c_k \geq 0$

Det karakteristiske polynom II

Trik:

Vi ser at $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow q(\lambda) = 1$.

Analyse av q:

Forutsetning: En eller annen $c_i \neq 0$, $\lambda > 0$.

- q er strengt avtagende. $(q'(\lambda) < 0)$
- $q(\lambda) \to +\infty$ når $\lambda \to 0$
- $q(\lambda) \to 0$ når $\lambda \to \infty$

Dette impliserer[a] at det finnes en unik $\lambda_1 > 0$ slik at $q(\lambda_1) = 1$.

[a] Er du i tvil: Tegn figur.

L har en unik positiv egenverdi λ_1

Algebraisk multiplisitet I

Når λ_1 er et nullpunkt for p betyr det at p kan faktoriseres som $p = (\lambda - \lambda_1)r$, der r er et polynom i λ.

Hvis λ_1 har algebraisk multiplisitet m kan vi skrive $p = (\lambda - \lambda_1)^m r$. I så fall er

$$p'(\lambda) = m(\lambda - \lambda_1)^{m-1} r(\lambda) + (\lambda - \lambda_1)^m r'(\lambda).$$

Vi ser at $m > 1 \Leftrightarrow p'(\lambda_1) = 0$.

Algebraisk multiplisitet II

Beregning av $p'(\lambda_1)$:

$$p'(\lambda_1) = n\lambda_1^{n-1}(1 - q(\lambda_1)) + \lambda_1^n q'(\lambda_1) = 0 + \lambda_1^n q'(\lambda_1) < 0$$

Fordi – som vi så over – $q'(\lambda) < 0$.

Vi kan altså ikke ha $p'(\lambda_1) = 0$.
λ_1 **har algebraisk multiplisitet** 1
Følgelig er den geometriske multiplisiteten til λ_1 lik 1. ($m_A \geq m_G \geq 1$ for egenverdier).

Egenrommet til λ_1 har dimensjon 1. Dette betyr at det finnes en egenvektor $\mathbf{x}_1$ tilhørende λ_1 slik at alle egenvektorer tilhørende λ_1 er skalarmultipler av $\mathbf{x}_1$.

Egenverdier og egenvektorer

Konklusjon:

Dersom ikke alle koeffesientene $c_i = 0$, så har L en unik positiv egenverdi λ_1 med en unik tilhørende egenvektor $\mathbf{x}_1$.

Vi ha følgende formel for denne egenvektoren:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_1 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

Befolkningsutvikling I: skalarmultipler av $\mathbf{x}_1$

$\mathbf{x}^{(t_0)} = c\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{x}^{(t_k)} = L^k\mathbf{x}_1 = c\lambda_1^k x_1.$$

- Relativ størrelse av alderssegmenter (den demografiske fordelingen) er konstant.
- Total kvinnelig befolkning ved tisdpunkt k, $M_k = \lambda_1^k M_0$.
- λ_1 representerer reproduksjonsraten, altså det gjennomsnittlige antallet jentebarn pr. kvinne.

Andre (komplekse) egenverdier I

For å fostå det generelle bildet, må vi ha en viss oversikt over de andre egenverdiene, også de komplekse.

Komplekse egenverdier for L er det samme som komplekse nullpunkter for polynomet $p(\lambda)$.

Anta at $\lambda_2 = re^{i\theta}$ er en (kompleks) egenverdi for L ulik λ_1 (Det betyr at λ_2 ikke er positiv, reell. D.v.s $\theta \neq 2k\pi$).
Siden $p(\lambda_2) = 0$, er $q(\lambda_2) = 1$:

$$1 = q(\lambda_2) = \sum_k c_k r^{-k} e^{-ik\theta} = (\sum_k c_k r^{-k} \cos(k\theta)) - i(\sum_k c_k r^{-k} \sin(k\theta)).$$

$$= \tilde{q}(\lambda_2) + i\bar{q}(\lambda_2)$$

Andre (komplekse) egenverdier II

For at $\lambda_2 = re^{i\theta}$ skal være en egenverdi, må altså

$$\bar{q}(r) = \sum_k c_k r^{-k} \sin(k\theta) = 0, \quad \tilde{q}(r) = \sum_k c_k r^{-k} \cos(k\theta) = 1$$

Vi har for alle k

$$c_k \cos(k\theta) \leq c_k$$

Derav følger det at $\tilde{q}(\lambda) \leq q(\lambda)$ for alle reelle $\lambda > 0$.

Konklusjon:

$|\lambda_2| = r \leq \lambda_1$[a].

[a] For $r > \lambda_1$ er $\tilde{q}(r) \leq q(r) < q(\lambda_1) = 1$.

Dominerende egenverdi I

Dominerende egenverdi

En egenverdi λ_1 for en matrise A kalles dominerende hvis $|\lambda| < |\lambda_1|$ for alle andre egenverdier λ for A

Legg merke til:

Hvis to etterfølgende $c_k, c_{k+1} \neq 0$ [a], vil enten

$$c_k \cos(k\theta) < c_k \quad \text{eller} \quad c_{k+1} \cos((k+1)\theta) < c_{k+1}.$$

Vi får da $\tilde{q}(\lambda) < q(\lambda)$ for alle reelle $\lambda > 0$ og følgelig $|\lambda_2| < \lambda_1$.

[a] d.v.s to etterfølgende a_k, a_{k+1} ulik 0

Dominerende egenverdi II

Dominerende-egenverdi-konklusjon

Hvis to etterfølgende a_k, a_{k+1} ikke er lik 0, vil λ_1 være den dominerende egenverdien. D.v.s $|\lambda| < \lambda_1$ for alle andre egenverdier λ for L

Vi skal se at den dominerende egenverdien bestemmer utviklingen i det lange løp. Vi vet ikke om vi kan diagonalisere L. La oss likevel anta det[3].

[3] Dette endrer ikke konklusjonen, fordi det samme argumentet gjelder for "generalisert diagonalisering" (Se jordanformen, Lineære Metoder). Her er det viktig at både den algebraiske multiplisiteten og den geometriske multiplisiteten til λ_1 er lik 1. (Det holder altså ikke at den geometriske er lik 1)

Diagonalisering

P: Diagonaliserende matrise. Første kolonne: Egenvektoren $\mathbf{x}_1$.
$\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$: $n \times n$-diagonalmatrise med $d_1, \dots, d_n$ langs diagonalen.

$$L^k = P\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots \lambda_n^k)P^{-1} = \lambda_1^k P\mathrm{diag}(1, (\lambda_2/\lambda_1)^k, \dots (\lambda_n/\lambda_1)^k)P^{-1}$$

Anta nå at λ_1 er dominerende:

Da er$|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ når $i \neq 1$. For store k får vi

$$\mathbf{x}^{(t_k)} = L^k \mathbf{x}^{(t_0)} \approx \lambda_1^k P diag(1, 0, 0, \dots, 0) P^{-1} \mathbf{x}^{(t_0)}.$$

Dermed

$$\mathbf{x}^{(t_k)} \approx \lambda_1^k N * \mathbf{x}_1$$

for store k.

Konklusjon

Anta at vi har to fruktbare alderssegmenter på rad[a]. Da vil befolkningsfordelingen gradvis nærme seg et skalarmultippel av $\mathbf{x}_1$ (Uavhengig av hvilken fordeling vi startet med). Den totale reproduksjonsraten vil nærme seg λ_1

[a] D.v.s to a_k, a_{k+1} som begge er ulike 0

Konklusjon med overføringsverdi

Hvis en matrise A har en dominerende egenverdi λ_1 med algebraisk multiplisitet 1 og tilhørende egenvektor $\mathbf{x}_1$, så vil

$$A^k \mathbf{x} \approx \lambda_1^k c \mathbf{x}_1$$

for store k. Her er c en konstant[a].

[a] c er identisk med det første elementet i vektoren $P^{-1}\mathbf{x}$. Hvorfor?