

KOMPLEKSE EGENVERDIER I KARAKTERISTISK POLYNOM FOR DIFFERENSIALLIGNINGER

LARS SYDNES

SAMMENDRAG. Her ser vi hvordan vi kan løse systemer av differensialligninger ved hjelp av kompleks diagonalisering, og at imaginære egenverdier gir oscillerende løsninger. Vi kan kalle dette en kompleks utgave av lærebokas kapittel 9.1.

Som eksempel studerer vi den harmoniske oscillator; mekaniske system bestående av en punktmasse som er opphengt i en fjær.

1. INTRODUKSJON

Vi studerer her differensialligninger av typen

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

der A er en reell 2×2 -matrise¹.

Tidligere har vi løst slike systemer ved å diagonalisere A , og det er akkurat det vi skal gjøre nå også. Vi skal løse det ved hjelp av *kompleks diagonalisering*.

Vi starter ballet med å studere den karakteristiske ligningen til A . Vi skriver den opp som²

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Oppgave 1. La A være en 2×2 -matrise. Vis at det karakteristiske polynomet til A er

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Eigenverdiene til A , altså løsningene av den karakteristiske ligningen er da gitt ved formelen

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Her er det nyttig å skille mellom ulike alternativer:

- $\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0$: I så fall har det karakteristiske polynomet to distinkte reelle røtter. Dette medfører at A er diagonaliserbar³. Lærebokas kapittel

Date: 23. april 2009.

¹Hvis V er vektorrommet av uendelig mange ganger deriverbare funksjoner $\mathbf{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$), altså funksjoner av en reell variabel med verdier i $\mathbb{R}^2$. Vi kan kalle V *rommet av glatte kurver i $\mathbb{R}^2$* . Derivasjon kan betraktes som en lineærabildning $D: V \rightarrow V$. Multiplikasjon med en matrise A kan også betraktes som en lineærabildning $T_A: V \rightarrow V$. Hvis vi setter $T = D - T_A$, kan vi forme ligningen vår om til $T\mathbf{y} = 0$. Ligningen vår er altså en homogen lineær ligning på vektorrommet av glatte kurver i planet. **Oppgave:** Skriv ned de detaljene som skal til for at dette gir mening. Hva er vektorromsoperasjonene i det nevnte vektorrommet? Hvis $\mathbf{y} \in V$, skriv ned $T_A\mathbf{y}$.

²Undersøk gjerne om dette stemmer.

³Se teorem 7.2.3.

9.1 forteller oss hvordan vi i dette tilfellet kan finne løsningene til ligningen vår.

- $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) = 0$: I dette tilfellet har det karakteristiske polynomet 1 reell rot. Vi kan ikke med sikkerhet fastslå om A er diagonaliserbar. Det kommer an på om egenrommet til denne ene egenverdien har dimensjon 1 eller 2. Hvis A er diagonaliserbar, vet vi hva vi skal gjøre. Hvis A ikke er diagonaliserbar, vet vi ikke hva vi skal gjøre. For å finne ut av dette: Ta kurset *TMA4145 lineære metoder*, og/eller les om *jordanformen*.
- $\text{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$: I dette tilfellet har det karakteristiske polynomet ingen reelle røtter⁴. Derimot har det to distinkte komplekse røtter. Det er dette tilfellet vi her skal se på.

2. KOMPLEKS DIAGONALISERING

Vi skal her lære oss litt om kompleks diagonalisering. Strategien vår vil være å oppføre oss som vanlig, men regne med komplekse tall istedenfor reelle. Kapittel 10.6 i Anton & Rorres forteller oss en del om kompleks diagonalisering. Vi skal nøye oss med å slå fast følgende:

Setning 2.1. *Hvis A er en reell 2×2 -matrise, og den karakteristiske ligningen ikke har reelle løsninger, så er A komplekst diagonaliserbar.*

Bevis. Vi så over at A i dette tilfellet har to distinkte komplekse egenverdier. Den komplekse versjonen av teorem 7.2.3 forteller oss at A er diagonaliserbar. Q.E.D.

Eksempel 2.2. Nå skal vi studere 2×2 -matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix},$$

der ω er et reelt tall. Det karakteristiske polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2$$

har røtter $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$.

For å finne egenvektorer tilhørende λ_1 studerer vi matrisen

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i\omega & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed er $\{[-i, \omega]^T\}$ en basis for egenrommet tilhørende $\lambda_1 = i\omega$.

På en tilsvarende måte finner vi ut at $\{[i, \omega]^T\}$ er en basis for egenrommet tilhørende $\lambda_2 = -i\omega$.

Ifølge arbeidshypotesen vår, som sier at vi kan overføre teknikkene fra reell lineæralgebra til kompleks lineæralgebra, skal matrisen

$$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ \omega & \omega \end{bmatrix}$$

diagonalisere A . D.v.s

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix}$$

⁴Når vi diskuterer reelle tall, har vi ikke lov til å ta kvadratroten av et negativt tall. Hvis vi ønsker det, må vi ta de komplekse tallene med i betraktningen.

Oppgave 2. Regn ut P^{-1} (med den vanlige metoden fra reell lineæralgebra), sjekk at $P^{-1}P = PP^{-1} = I$, og regn ut $P^{-1}AP$.

3. SYSTEMER AV LINEÆRE ORDINÆRE DIFFERENSIALLIGNINGER.

Her studerer vi systemer av lineære ordinære differensialligninger. Disse skriver vi som oftest på matriseform⁵

$$(1) \quad \mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x).$$

Slike systemer løser vi ved å finne en diagonaliserende matrise P . Substitusjonen⁶ $P\mathbf{z} = \mathbf{y}$ gir oss å ligningen

$$\mathbf{z}'(x) = P^{-1}AP\mathbf{z}(x).$$

Siden $P^{-1}AP$ er en diagonalmatrise, er det enkelt⁷ å løse dette systemet. Vi finner så den generelle løsningen $\mathbf{y}(x)$ ved formelen $\mathbf{y} = P\mathbf{z}$.

4. DEN HARMONISKE OSCILLATOR

Vi skal her se på en masse m som er hengt opp i en fjær med fjærkonstant k . Fjærkonstanten⁸ gir oss sammenhengen mellom fjærens forlengelse⁹ og utøvd kraft:

$$\text{kraft} = -k \times \text{forlengelse}$$

Posisjonen til massen vår vil, som funksjon av tiden, være bestemt av Newtons 2.lov – *kraft* = *masse* $\times$ *akselerasjon* – samt initialbetingelsene¹⁰. Hvis vi bruker fjærforlengelse $x(t)$ som mål for massens posisjon, får vi ligningen¹¹

$$-k \cdot x(t) = mx''(t).$$

Vi kan sette $\omega = \sqrt{k/m}$. Vi får da ligningen

$$(2) \quad x''(t) = -\omega^2 x(t).$$

Vi skal se hvordan vi kan løse denne ligningen ved hjelp av lineær algebra.

Vi innfører nye variabler $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$, der $y_1 = x$ og $y_2 = x'$. Disse størrelsene vil oppfylle ligningene

$$y_1' = x' = y_2 \quad y_2' = x'' = -\omega^2 x = -\omega^2 y_1.$$

⁵Denne notasjonen indikerer at vi studerer n funksjoner $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hvis a_{ij} er element ij i A , så kan vi skrive systemet som

$$y_i'(x) = a_{i1}y_1(x) + \dots + a_{in}y_n(x) \quad i = 1, \dots, n.$$

⁶Når vi gjør en slik substitusjon, så er $P\mathbf{z}' = \mathbf{y}'$. Sjekk gjerne dette komponentvis.

⁷Vi får n uavhengige ligninger $y_i' = \lambda_i y_i$. Disse ligningene har løsninger $y_i = C_i e^{\lambda_i x}$. Her kan λ_i, C_i være reelle eller komplekse, avhengig av situasjonen.

⁸Se også eksempel 2 på side 471 i Anton & Rorres. Denne modellen for avhengigheten mellom forlengelse av fjær og kraften fjæren utøver kalles gjerne Hookes lov. Dette er en unøyaktig modell, men den stemmer ganske godt for mange fjærer så lenge utslagene er små.

⁹negativ forlengelse = forkortelse

¹⁰Ifølge den newtonske determinismen er hele bevegelsen bestemt av startposisjon og starthastighet.

¹¹Dette forutsetter naturligvis at massen beveger seg langs fjærens akse, d.v.s en rett linje som er parallell med fjæren, og at vi neglisjerer mange fysiske effekter, som f.eks friksjonen og fjærens egen masse.

Dermed har vi et system av formen (1) der

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Men, så flaks! det var jo akkurat den matrisen vi diagonaliserte i eksempel . Dermed vet vi at matrisen

$$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ \omega & \omega \end{bmatrix}$$

diagonaliserer A , i.e.

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix}.$$

Vi innfører nå nye variabler $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y}$, i.e, $P\mathbf{z} = \mathbf{y}$. Ligningen vår omformes da til

$$\mathbf{z}' = P^{-1}\mathbf{y}' = P^{-1}A\mathbf{y} = P^{-1}AP\mathbf{z} = D\mathbf{z}.$$

Komponentvis gir dette

$$z_1' = i\omega z_1, \quad z_2' = -i\omega z_2.$$

Disse ligningene har generelle løsninger

$$z_1(t) = C_1 e^{i\omega t}, \quad z_2 = C_2 e^{-i\omega t},$$

der C_1, C_2 er villkårlige komplekse konstanter.

Når vi ønsker å gå tilbake til $\mathbf{y}$ -koordinatene, kan vi skrive den generelle løsningen¹² som

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -i & i \\ \omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{i\omega t} \\ C_2 e^{-i\omega t} \end{bmatrix}$$

Opprinnelig var vi egentlig interessert i $x(t) = y_1(t)$. Vi kan trekke ut denne komponenten, og får

$$(3) \quad x(t) = (-i) \cdot C_1 e^{i\omega t} + i \cdot C_2 e^{-i\omega t}.$$

Dette den generelle løsning av ligningen $x'' = -\omega^2 x$, der vi ser på x som en kompleks funksjon av t . Men vi er kun interessert i reelle løsninger. Dette ordner seg når vi tar hensyn til initialbetingelsene: Vi skal se at $x(t)$ er reell for alle t dersom $x(0), x'(0)$ er reelle.

Anta at startposisjonen $x(0) = a \in \mathbb{R}$ og starthastigheten $x'(0) = b \in \mathbb{R}$. Dette gir oss ligningene

$$(4) \quad a = x(0) = (-i)C_1 + iC_2, \quad b = \omega C_1 + \omega C_2.$$

Hvis $C_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ og $C_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, får vi av dette følgende ligninger for α_i, β_i : Fra imaginærdelen av ligningene får vi

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \text{i.e.} \alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 + \beta_2 = 0, \quad \text{i.e.} \beta_1 = -\beta_2,$$

hvilket betyr at vi kan skrive $C_1 = \alpha + i\beta$ og $C_2 = \alpha - i\beta$. Realdelene av ligningene (3) forteller oss at $\beta = a/2$ og $\alpha = b/2\omega$. Initialbetingelsene gir oss altså

$$C_1 = \frac{b}{2\omega} + i\frac{a}{2}, \quad C_2 = \frac{b}{2\omega} - i\frac{a}{2}.$$

¹²Husk at $\mathbf{z}(t)$ er en løsning av $\mathbf{z}' = D\mathbf{z}$ hvis og bare vis $\mathbf{y}(t)$ er en løsning av $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Setter vi dette inn i (2), får vi

$$\begin{aligned} x(t) &= (-i)\left(\frac{b}{2\omega} + i\frac{a}{2}\right)(e^{i\omega t}) + i\left(\frac{b}{2\omega} - i\frac{a}{2}\right)e^{-i\omega t} \\ &= \frac{a}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{b}{2\omega}(-ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t}) \\ &= \frac{a}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{b}{2\omega}(e^{i(\omega t - \pi/2)} + ie^{-i(\omega t - \pi/2)}) \\ &= a \cos(\omega t) + \frac{b}{\omega} \cos(\omega t - \pi/2) \\ &= a \cos(\omega t) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega t), \end{aligned}$$

etter å ha benyttet en del triks¹³. Men, her står det at $x(t)$ er reell for alle verdier av t . Bingo!

Dette er den generelle reelle løsningen av differensialligningen $x''(t) = -\omega x(t)$, og vi har nå en beskrivelse av massens bevegelse når den er hengt opp i fjæren.

Oppgave 3. Tegn en figur som viser bevegelsen dersom vi starter bevegelsen i $t = 0$ med utgangshastighet $x' = 0$ og utgangspunkt $x = 1$.

Oppgave 4. Beregn den totale energien $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$ som funksjon av tiden, og vis at den er konstant.

Denne løsningen kalles oscillerende¹⁴/periodisk/syklisk. Disse bevegelsene gjentar seg uforandret i det uendelige¹⁵.

Perioden $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$, frekvensen $f = 1/T = \omega/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$. Vi ser at frekvensen avtar om vi øker massen, og at den øker når vi øker fjærens stivhet, d.v.s fjærkonstanten.

Hvis vi skal oversette vår innsikt til dagligspråk, så kan vi gjøre det på følgende måte: En masse m som er opphengt i en fjær med fjærkonstant k vil bevege seg opp og ned $\frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$ ganger pr. tidsenhet.

5. KOMPLEKSE EGENVERDIER OG OSCILLASJON

Av lærebokas kapittel 9.1 fremgår det at løsninger av diagonaliserbare systemer med reelle egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avhenger av funksjonene $e^{\lambda_i t}$. Disse funksjonene beskriver eksponentiell vekst eller eksponentiell nedgang. Systemer med utelukken- de reelle egenverdier kan altså ikke oscillere.

Vi har nå sett ett eksempel på et system som hadde rent imaginære egenverdier. Dette gav oss et rent oscillerende system.

¹³Her har dere en del nyttige regneregler, som dere sikkert kan fra før.

- $i = e^{i\pi/2}, \quad -i = e^{-i\pi/2}$
- $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$
- $\cos(\theta - \pi/2) = \sin(\theta)$

¹⁴oscillasjoner = svingninger

¹⁵Dette er selvfølgelig u fysisk. Av erfaring vet vi at slike systemer slutter å svinge etter en viss tid. Denne u fysiske oppførselen kan forklares ved at vi bruker en unøyaktig modell. Vi kan forbedre modellen ved å innføre friksjon. Dette svarer til at systemet har egenverdier med negativ realdel. Se siste avsnitt

Systemer med komplekse egenverdier vil generelt sett ha løsninger med økende/avtagende oscillasjoner. Et system som over med egenverdier $\alpha \pm i\beta$ vil har generell løsning

$$x(t) = e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$$

Hvis $\alpha < 0$, vil løsningene ha avtagende oscillasjoner. Hvis $\alpha > 0$, vil løsningene ha økende oscillasjoner. Realdelen α bestemmer hvor hurtig oscillasjonene øker/avtar, mens imaginærdelen β bestemmer hvor hurtig systemet oscillerer.