Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Tore Forbregd (92 44 62 36)

EKSAMEN I MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Bokmål
Onsdag 5. juni 2013
Tid: 09:00 – 13:00 (4 timer)

Hjelpemidler: Kode D (bestemt enkel kalkulator: HP30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

a) La A være matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn basis for:

1. Radrommet til A blant radvektorene til A.
2. Kolonnerommet til A blant kolonnevektorene til A.
3. Nullrommet til A.

b) La B_t være følgende matrise

$$\begin{bmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t-2 \end{bmatrix}.$$

For hvilke verdier av $t \in \mathbb{R}$ vil B_t ha maksimal rang? Hva er rangen og nulliteten til B_t når B_t ikke har maksimal rang.

Oppgave 2 La C være matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til C og basis for egenrommene til C.

b) Finn en ortogonal matrise P slik at

$$P^T C P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

der $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.

Oppgave 3 La $P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ være mengden av reelle polynom av grad høyst lik 2.

a) Vis at P_2 er et underrom av vektorrommet $\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funksjon}\}$ bestående av funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$, med vanlig addisjon og skalarmultiplikasjon.

Betrakt P_2 som et indreproduktrom ved at

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

(Det oppgis at dette er et indreprodukt.)

La $p_1(x) = x - x^2$ og $p_2(x) = 1 - x^2$ og sett $W = \mathrm{Span}\{p_1(x), p_2(x)\}$ i P_2. La $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildningen gitt ved

$$T(q(x)) = \begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x) \rangle \\ \langle q(x), p_2(x) \rangle \end{bmatrix}$$

for alle $q(x) \in P_2$.

b) Vis at T er en lineæravbildning.

c) Vis at $\operatorname{Ker} T = W^{\perp}$ og bruk dette til å finne en ortogonal basis for P_2 der $p_1(x)$ og $p_2(x)$ inngår i basisen.

Oppgave 4 La M være en 2×2 Markovmatrise som er symmetrisk og la $|q| < 1$ være en reell egenverdi for M.

a) Vis at M kan uttrykkes som

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+q & 1-q \\ 1-q & 1+q \end{bmatrix}$$

og finn basiser for egenrommene til M i $\mathbb{R}^2$.

b) Anta at fra ett år til neste, vil 99% av ikke-røykere fortsatt være ikke-røykere, og at 99% av røykere fortsatt være røykere. Dersom denne tendensen er konstant hva kan du si om andelen røykere og ikke-røykere i det lange løp?

Oppgave 5 La A være en kvadratisk matrise slik at $A^2 = A$, vis at da har A kun 0 eller 1 som egenverdi.