



Fagleg kontakt under eksamen:
Tore Forbregd (92 44 62 36)

EKSAMEN I MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Nynorsk
Onsdag 5. juni 2013
Tid: 09:00 – 13:00 (4 timer)

Hjelpemiddel: Kode D (bestemt enkel kalkulator: HP30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal grunngjes.

Oppgåve 1

a) La A vere matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn basis for:

1. Radrommet til A mellom radvektorane til A .
2. Kolonnerommet til A mellom kolonnevektorane til A .
3. Nullrommet til A .

b) La B_t vere følgjande matrise

$$\begin{bmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t-2 & t-2 \end{bmatrix}.$$

For kva verdier av $t \in \mathbb{R}$ vil B_t ha maksimal rang? Kva er rangen og nulliteten til B_t når B_t ikkje har maksimal rang.

Oppgåve 2 La C vere matrisa

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Finn eigenverdiane til C og basis for eigenromma til C .

b) Finn ein ortogonal matrise P sånn at

$$P^T C P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

der $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.

Oppgåve 3 La $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ vere mengda av reelle polynom av grad høgst lik 2.

a) Vis at P_2 er eit underrom av vektorrommet $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funksjon}\}$ bestående av funksjonar frå \mathbb{R} til \mathbb{R} , med vanleg addisjon og skalarmultiplikasjon.

Sjå på P_2 som eit indreproduktrom ved at

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

(Det blir oppgjeve at dette er eit indreprodukt.)

La $p_1(x) = x - x^2$ og $p_2(x) = 1 - x^2$ og sett $W = \text{Span}\{p_1(x), p_2(x)\}$ i P_2 . La $T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vere avbildninga gjeve ved

$$T(q(x)) = \begin{bmatrix} \langle q(x), p_1(x) \rangle \\ \langle q(x), p_2(x) \rangle \end{bmatrix}$$

for alle $q(x) \in P_2$.

- b) Vis at T er ei lineæravbilding.
- c) Vis at $\text{Ker } T = W^\perp$ og bruk dette til å finne ein ortogonal basis for P_2 der $p_1(x)$ og $p_2(x)$ inngår i basisen.

Oppgåve 4 La M vere ei 2×2 Markovmatrise som er symmetrisk og la $|q| < 1$ vere ein reell eigenverdi for M .

- a) Vis at M kan uttrykkjast som

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+q & 1-q \\ 1-q & 1+q \end{bmatrix}$$

og finn basisar for eigenromma til M i \mathbb{R}^2 .

- b) Gå ut i frå at frå eit år til neste, vil 99% av ikkje-røykjarar vere ikkje-røykjarar, og at 99% av røykjarar vil vere røykjarar. Om denne tendensen er konstant, kva kan du seie om andelen røykjarar og ikkje-røykjarar i det lange løp?

Oppgåve 5 La A vere ei kvadratisk matrise der $A^2 = A$, vis at då har A kun 0 eller 1 som eigenverdi.