Oppg 1

(1)

a) $\det(A_t) = t(-1+t^2)$

matrisa er singulær for $t=0$ og $t=\pm 1$ ellers har A_t max rang dvs 3.

- $t=0$ $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang $(A_0)=2$ $\quad$ nullitet $(A_0)=1$

- $t=1$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang $(A_1)=2$ $\quad$ nullitet $(A_1)=1$

- $t=-1$ $\quad A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang $(A_{-1})=2$ $\quad$ nullitet $(A_{-1})=1$

ellers er rang $(A_t)=3$ nullitet $(A_t)=0$

b) 1) For $t \neq 0$ og $t \neq -1$ og $t \neq 1$

er A_t inverterbar og ligningsystemet har nøyaktig en løsning

2) for $t=0$ man får løsninger av type $\begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma \in \mathbb{R}$

uendelig mange løsninger

for $t=1$ man får løsninger av type $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix}$ $\quad \beta \in \mathbb{R}$

uendelig mange løsninger

3) $t=-1$ $\quad A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Siden $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

man får ingen løsning.

Oppg 2

a) $\mathcal{K} \subset M_{3\times 3}$ ($\mathcal{K}$ er submengde av vektorrommet av 3×3 matriser)

Vi må vise at $\mathcal{K}$ er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon.

addisjon $\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(a_1+a_2) & 0 & c_1+c_2 \\ -(b_1+b_2) & -(c_1+c_2) & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}$

skalarmultiplikasjon $\gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma a & \gamma b \\ -\gamma a & 0 & \gamma c \\ -\gamma b & -\gamma c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}$

$\gamma \in \mathbb{R}$

derfor er $\mathcal{K}$ et underrom av $M_{3\times 3}$.

Alle matriser i $\mathcal{K}$ kan skrives som

$a E_1 + b E_2 + c E_3$ derfor $E_1\ E_2\ E_3$ genererer $\mathcal{K}$.

I tillegg er E_1, E_2, E_3 lineær uavhengig fordi

$$\lambda E_1 + \mu E_2 + \gamma E_3 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \gamma \\ -\mu & -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \mu = 0 \quad \gamma = 0.$$

(dvs. $\{E_1, E_2, E_3\}$ er en basis for $\mathcal{K}$)

E_1, E_2, E_3 er ortogonale m.h.p. det gitte indreproduktet

og $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} E_1, \frac{1}{\sqrt{2}} E_2, \frac{1}{\sqrt{2}} E_3\right\}$ er en ortonormal basis

b) $T(A) = E_1 A - A E_1$

Vi verifiserer at definisjonene av lineær transformasjon (s. 366 Anton & Rorres) er oppfylt.

$$\bullet\ T(A_1+A_2) = E_1(A_1+A_2) - (A_1+A_2)E_1$$
$$= E_1A_1 - A_1E_1 + E_1A_2 - A_2E_1$$
$$= T(A_1) + T(A_2)$$

$$\bullet\ T(\gamma A) = E_1(\gamma A) - (\gamma A)E_1$$
$$= \gamma(E_1A - AE_1) = \gamma \cdot T(A)$$

ok!

Matrisen til transformasjonen.

$$[T]_{\mathcal{D}} = \left[[T(E_1)]_{\mathcal{D}} \quad [T(E_2)]_{\mathcal{D}} \quad [T(E_3)]_{\mathcal{D}} \right]$$ s 392 Anton Rorres

og vi har at for $A \in \mathcal{E}$ $\quad [A]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har $\quad [T(E_1)]_{\mathcal{D}} = [0]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[T(E_2)]_{\mathcal{D}} = [E_1E_2 - E_2E_1]_{\mathcal{D}} = [E_3]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T(E_3)]_{\mathcal{D}} = [E_1E_3 - E_3E_1]_{\mathcal{D}} = [E_2]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

derfor $\quad [T]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\det([T]_{\mathcal{D}}) = 0 \implies T$ er ikke en-entydig

$$R(T) = \{ B \in \mathcal{E} \text{ s.a } B = T(A) \text{ med } A \in \mathcal{E} \}$$

$A = aE_1 + bE_2 + cE_3 \quad T(A) = aT(E_1) + bT(E_2) + cT(E_3) =$

$= bE_3 + cE_2 \qquad R(T) = \text{span}\{E_2, E_3\}$

$$\text{Ker}(T) = \{ C \in \mathcal{E} \text{ s.a. } T(C) = 0 \}$$

④

$$C = \hat{a} E_1 + \hat{b} E_2 + \hat{c} E_3$$

$$T(C) = \hat{b} E_3 + \hat{c} E_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\hat{b} = 0 \quad \hat{c} = 0$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \operatorname{Span}\{E_1\}$$

Oppg 3

A er normal $\Longleftrightarrow$ $A^H A = A A^H$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

den gitte matrisen er normal.

Egenverdiene til A er 1 og egenverdiene til $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

$$\lambda = 1 \pm 2i$$

Man finner egenvektorene til $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$:

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad w = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

for A $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tilde{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er

egenvektorene. Da

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ og vi har $$U^H A U = \begin{pmatrix} 1+2i & & \\ & 1-2i & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Oppg 4

$T(A) = S^{-1} A S$

λ er egenverdi til $A \iff \exists\, x \neq 0$ s.a. $Ax = \lambda x$

$\iff S^{-1} A x = \lambda S^{-1} x \iff S^{-1} A S (S^{-1} x) = \lambda S^{-1} x$

$\iff T(A)(S^{-1}x) = \lambda (S^{-1}x)$

i tillegg $S^{-1}x = 0 \iff x = 0$

derfor $y = S^{-1}x$ er egenvektor for $S^{-1}AS = T(A)$ med λ som egenverdi

Oppg 5

$$\begin{array}{c|cc} & \text{blå} & \text{rød} \\ \hline \text{blå} & \frac{45}{100} & \frac{60}{100} \\ \text{rød} & \frac{55}{100} & \frac{40}{100} \end{array} = P$$

P er regulær (s. 581 Anton Rorres)

(fordi P har alle elementer positive)

Siden P er regulær da finns det en likevektst vektor q og den er s.a. $Pq = q$ (s. 583) q er en sannsynlighet vektor

$(P - I)\, q = 0$

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} -55 & 60 \\ 55 & -60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1 = \frac{60}{55} \cdot q_2 = \frac{12}{11} q_2$$

i tillegg q er sannsynlighets vektor dvs $q_1 \geq 0$ $q_2 \geq 0$

og $q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow \frac{12}{11} q_2 + q_2 = 1 \Rightarrow$

$q = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ dvs 52.1739 % blå papir

47.8261 % rød papir