Løsningsforslag 30. mai 2000

MNFMA108 vår 2000

Oppg. 1

Redusere A på trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- rang $A = 2$ (antall ledende enere)
- nullitet$(A) = 4 - \text{rang} A = 2$
- Basis for kol.rommet: de kolonnene i A som har ledende 1-er på trappeform

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

Evt.: tilsv. en basis for radrommet til A^T, så

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \right\}$$

- Basis for radrommet: tilsv. basis for radrommet til den reduserte matrisa

$$\Rightarrow \{(1, 0, -1, 5), (0, -2, 5, -6)\}$$

- Basis for nullrommet: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Mai 2000

Oppg. 2

a)

$$\int_{-1}^{1} x^n\,dx = \begin{cases} 0 & n \text{ odde} \\ \frac{2}{n+1} & n \text{ like} \end{cases}$$

P_2 har basis $\{u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2\}$

Gram-Schmidt for å få ortogonal basis:

1. La $v_1 = 1 \; (= u_1)$, $\|v_1\|^2 = 2$

2. La $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

$$= x - \frac{0}{2} \cdot 1 = x, \quad \|v_2\|^2 = \frac{2}{3}$$

3. La $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$

$$= x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2/3} \cdot x = x^2 - 1/3$$

$$\|v_3\|^2 = \frac{8}{45}$$

Normalisere vektorene ($w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$) og få flg. ortonormale basis

$$\left\{ w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \; w_3 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - 1/3\right) \right\}$$

b)

$T: P_2 \longrightarrow P_2$ gitt ved

$T(f) = x \cdot f' + f''$

- Vis at $T(f+g) = T(f) + T(g)$
  og $T(kf) = k\,T(f)$

- $T(a+bx+cx^2) = 2c + bx + 2cx^2$

$$\Rightarrow \quad [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- $\text{Ker}\, T = \{a+bx+cx^2 \mid b=c=0\} = \mathbb{R}$

- $R(T) = \{a+bx+cx^2 \mid a=c\}$

Oppg. 3

$$v^* = (M^T M)^{-1} M^T y$$

1)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad v^* = \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \\ -\frac{1}{2}g \end{bmatrix}$$

2)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -9 \\ 1 & 4 & -16 \end{bmatrix}, \quad v^* = \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \\ \frac{1}{2}g \end{bmatrix}$$

3)
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix} \quad v^* = \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s_0 = \frac{1398}{35}, \quad v_0 = \frac{143}{14}, \quad g = \frac{69}{7}$$

$$s_0 \simeq 39{,}94, \quad v_0 \simeq 10{,}21, \quad g \simeq 9{,}86$$

Hvis vi antar $s_0 = 40$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -9/2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -14 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{v_0 = \frac{1403}{310} \approx 4{,}53 \quad g = \frac{153}{31} \approx 4{,}93}$$

$$v_0 = \frac{3151}{310} \approx 10{,}16 \;, \quad g = \frac{305}{31} \approx 9{,}84$$

Mai 200

Oppg. 4:

a)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(3)} = L^3 \underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1130q \\ 600q^2 + 90q \\ 245q \end{bmatrix}$$

(etter 3 år)

b)

Likevekt $\Rightarrow$ den unike positive egenverdien $\lambda = 1$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \lambda^3 - 2q\lambda - \tfrac{1}{2}q$$

$$p(1) = 0 \iff q = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

c)

Fordelingen (el. forholdet mellom klassene) er gitt ved egenv. til $\lambda = 1$

Formel: $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$ evt. beregn $\underline{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Totalt 640 flaggermus

$\longrightarrow$ 400 i kl. 1, 160 i kl. 2, 80 i kl. 3.

Alternativt:

Likevekt $\Rightarrow$ $x^{(n+1)} = Lx^{(n)} \simeq x^{(n)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

(eg. $x^{(n+1)} \simeq \underbrace{\lambda}_{\text{unike pos. egenverdi}} x^{(n)}$)

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 2b + c \\ b &= qa \\ c &= 0.5b \end{aligned}$$

$\text{D}:$ $b = 2c$, $a = 5c$ og $b = qa$

$$\Downarrow$$

$$2c = q \cdot 5c$$

$$\underset{c \neq 0}{\Longrightarrow} q = \frac{2}{5}$$

Når $a + b + c = 640$

$\Rightarrow$ $a + b + c = 5c + 2c + c = 8c = 640$

$\Rightarrow$ $c = 80$, $b = 160$, $a = 400$

Oppg. 5:

a)

Må finne egenverdier og tilhørende egenvektorer.

Egenv.: $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 2$

Egenvektor for $\lambda_1 = -1$: (basisv.) $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektorer for $\lambda_2 = 2$: (basisv.) $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ gir $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

[mange mulige versjoner av dette]

b)

Har systemet $X' = AX$,
substituer $X = PU$ som gir ~~...~~
systemet $U' = DU$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} - c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{Generell løsning}$$

Initialbetingelsene gir løsningen

$$x_1(t) = 4e^{-t} - 4e^{2t}$$
$$x_2(t) = -2e^{-t} + 4e^{2t}$$
$$x_3(t) = -2e^{-t} + 3e^{2t}$$

Mai 2000

Oppg 6

a)

A hermittisk $\supset$: $A^* = A$ ← $n \times n$-matrise

La λ være en egenverdi for A med tilhørende egenvektor $\underline{v} \neq 0$

Dvs. at $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$
Mult. likheten med $\underline{v}^*$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}^* A \underline{v} = \underline{v}^* \lambda \underline{v} = \lambda(\underline{v}^* \underline{v}) \quad (*)$$

$\underline{v}^* A \underline{v}$ og $\underline{v}^* \underline{v}$ er 1×1-matriser ($\supset$: $\in \mathbb{C}$)

$(\underline{v}^* A \underline{v})^* = \underline{v}^* A^* \underline{v}^{**} \overset{A \text{ herm.}}{=} \underline{v}^* A \underline{v}$ og
$(\underline{v}^* \underline{v})^* = \underline{v}^* \underline{v}^{**} = \underline{v}^* \underline{v}$

$\supset$: Disse er hermittiske matriser

En hermittisk matrise har kun reelle tall langs hoveddiagonalen

$$\Rightarrow \quad \underline{v}^* A \underline{v},\ \underline{v}^* \underline{v} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{pga } (*))$$

[Merk: $(\lambda I - A)^* = \lambda I - A$, så ikke nødv. hermittisk (det er dette vi skal vise)]

b)

La
$$B = \frac{1}{2}(A + A^*)$$
$$C = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

Da er $A = B + C$, B er hermittisk og C er skjev-hermittisk.

$$B^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* + A^{**}) = B$$
$$C^* = \frac{1}{2}(A - A^*)^* = \frac{1}{2}(A^* - A^{**}) = -\frac{1}{2}(A - A^*) = -C$$