Eksamen

Løsningsforslag, MA108, 31 mai, 2002

Oppgave 1 a) Rang(A) = antall pivot-~~elementer~~ (evt. antall pivot-kolonner) til B $= \underline{\underline{3}}$

$\text{Rang}(A) + \dim(\text{null}(A)) = 5 \Rightarrow \dim(\text{null}(A)) = \underline{\underline{2}}$

$\dim(R(A)) = \text{Rang}(A) = \underline{\underline{3}}$

b) Basis radrommet : $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Basis søylerommet (fås ved å plukke ut pivot-kolonnenumrene (?: 1, 3, 4) i A) : $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

Basis for nullrommet til A finner vi ved å observere at x_2 og x_5 er fri variable i $A\vec{x} = \vec{0}$, der $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$. Sett $x_2 = 1$, $x_5 = 0$, henholdsvis $x_2 = 0$, $x_5 = 1$, og regn ut $\vec{x}$ ved å bruke $B\vec{x} = \vec{0}$. Vi får:

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9/2 \\ 0 \\ -4/3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2 a) Ligningssystemets matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ er radekvivalent til } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at z og w er fri variable. Velg $z=1, w=0$, henholdsvis $z=0, w=1$, og finn løsningene til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Disse er ortogonale, og vi normaliserer for å finne en ortonormal basis for V: $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\vec{u}_1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{u}_2$

b) Man observerer faktisk lett at

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$ av ønsket art.

Dersom man ikke observerer dette, kan man bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsprosess, idet man ser at $\left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_2 \right\}$ er en basis for $\mathbb{R}^4$. Vi får

$$\vec{e}_1 - \langle \vec{e}_1, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{e}_1, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \text{normalisert: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{u}$$

$$\vec{e}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{e}_2, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 - \langle \vec{e}_2, \vec{u}_3 \rangle \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{normalisert: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{u}_4$$

c) Den beste approksimasjonen er den ortogonale projeksjonen av $\vec{\mathbf{w}}$ på V. Altså

$$\text{proj}_{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{w}}) = \langle \vec{\mathbf{w}}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{\mathbf{w}}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \vec{u}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 3

a) Vi får Markov-matrisen

$$P = \begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}}^{\text{Fra}} \\ \text{Til} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dersom $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ er fordelingen én dag, så er

fordelingen $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ neste dag gitt ved $\underline{\vec{y} = P\vec{x}}$.

Dersom $\vec{y} = \begin{bmatrix} 180 \\ 85 \\ 85 \end{bmatrix}$, så skal vi finne $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ gitt

ved $\begin{bmatrix} 180 \\ 85 \\ 85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Vi får følgende utvidede matrise som skal settes på redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.3 & 180 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 85 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 & 85 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 1 & 6 & 1 & 850 \\ 8 & 3 & 3 & 1800 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -45 & -5000 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 850 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1000 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

Altså $\underbrace{\underline{x_1 = 150}}_{A}$, $\underbrace{\underline{x_2 = 100}}_{B}$, $\underbrace{\underline{x_3 = 100}}_{C}$

b) La $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ være fordelingen ved dag 0, og

la $\vec{x}_k = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$ være fordelingen ved dag k.

Se læreboka 4.9

Da er $\vec{x}_k = P^k \vec{x}_0$. P er en stokastisk matrise, og ifølge teori vil $\vec{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{}$ grensefordeling uansett $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$. Det betyr at grensen gir et bestemt forhold mellom fordelingen på (A), (B) og (C). Formulert anderledes: Det finnes en entydig sannsynlighets-vektor $\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, $q_i \geq 0, i = 1,2,3$, slik at $P\vec{q} = \vec{q}$.

Grensefordelingen ovenfor er gitt ved $\vec{q}$. Vi finner $\vec{q}$: $(I - P)\vec{q} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 & -0.3 \\ -0.1 & 0.4 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løsning:
$q_1 = 0.6$ (A)
$q_3 = 0.2 = q_2$ (B)(C)

Syklene vil tilnærmet fordele seg som:
A: 60% av 350 = $\underline{\underline{210}}$
C: 20% av 350 = $\underline{\underline{70}}$

Oppgave 4 a) $Q(x,y) = [x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

A er symmetrisk og kan ortogonalt diagonaliseres: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3/2-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)$

Normalisert egenvektor til $\lambda=1$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

——— " ——— $\lambda=2$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. La $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Da er $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$.

Dersom vi foretar substitusjonen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, så får vi:

$$1 = Q(x,y) = [x'\ y']\,P^{-1}AP\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x'\ y']\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= \underline{x'^2 + 2y'^2}$$

Dette er ligningen til en <u>ellipse</u>.

b) Ifølge teori (7.3 i læreboka) er maksimumsverdi, hhv. minimumsverdi, til $Q(x,y)$ dersom $x^2+y^2=1$ største, hhv. minste, egenverdi til A, dvs. 2, hhv. 1.

Siden "vår" betingelse er $x^2+y^2=4$ ⟺: $(\frac{x}{2})^2+(\frac{y}{2})^2=1$, så ser vi at $\max\{Q(x,y) \mid x^2+y^2=4\} = 4\cdot 2 = \underline{\underline{8}}$

$\min\{Q(x,y) \mid x^2+y^2=4\} = 4\cdot 1 = \underline{\underline{4}}$

Oppgave 5 a) $\det(P) = 1$, altså er P invertibel. Vi finner (dette er én måte) ved å foreta linjeoperasjoner på:

[i] refererer til linje (rekke)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{P} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{[2]\to[2]-[1]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{[3]\to[3]-[2]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{[1]\to[1]+[3]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{[3]\to-[3]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{1 & -1 & -1}_{P^{-1}} \end{array}\right]$$

Altså er $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \div 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & t^2+6 \end{bmatrix} \underset{[4]\to[4]-[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-5t+6 \end{bmatrix}$$

Q

$\det(Q) = 1$ altså er de tre øverste linjene (rekkene) lineært uavhengige. Da er

$\text{rang}(A_t) = 4 \Leftrightarrow t^2-5t+6 \neq 0 \supset: t \neq 2,3.$

$\text{rang}(A_t) = 3 \Leftrightarrow t = 2,3.$

Når $t \neq 2, 3$, så er de fire kolonnevektorene til A_t en basis for kolonnerommet til A_t. Altså:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5t \\ 0 \\ 0 \\ t^2+6 \end{bmatrix} \right\}.$$

Når $t = 2, 3$, så er de tre første kolonnevektorene til A_t en basis for kolonnerommet til A_t. Altså:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$