2/6-08



# Løsningsforslag Eksamen MA 1202 (+ diverse) 31 mai, 2008

**Oppgåve 1** a) $A$ og $A^TA$ har alltid same rang, og $A$ har opplagt rang 2. No er

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}, \quad (A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Så av dette ser vi også at $A^TA$ har rang 2.

For $A$ : nullitet + rang = 2 $(4\times 2)$

For $A^TA$ : nullitet + rang = 2 $(2\times 2)$

Det følger at $A$ har nullitet 0 og $A^TA$ har nullitet 0. (For $A$ følger også dette ved enkel utrekning, nemleg $Av = 0 \Rightarrow v = 0$ )

b) Den vanlege prosedyre gir

$$\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} = (A^TA)^{-1}A^T \cdot \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.5 \\ 2.08 \\ 2.83 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.435 \\ 0.577 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.58 \end{pmatrix}$$

**Oppgåve 2** Skriv $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = \sin x$, $v_4 = \cos x$

$w_1 = 1$, $w_2 = \sin x$, $w_3 = \cos x$

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad \mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$$

a) $D(v_1) = 0$, $D(v_2) = w_1$, $D(v_3) = w_3$, $D(v_4) = -w_2$

$$J(w_1) = v_2\,,\ J(w_2) = v_1 - v_4\,,\ J(w_3) = v_3$$

$$[D]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad [J]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$[D \circ J] = [D] \cdot [J] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[J \circ D] = [J][D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Merk</u> Med ei anna rekkefølge av basiselementa vil du kunne få andre matriser enn ovanfor.

<u>Oppgåve 3</u> a)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Det er berre 2 lineært uavhengige kolonner (eller rader), så rang$(M) = 2$. Difor er nulliteten lik $5-2=3$, dvs. nullrommet er 3-dimensjonalt. Difor er eigenrommet til eigenverdien $\lambda = 0$ 3-dimensjonalt. Dermed har vi 5 lineært uavhengige eigenvektorar, altså er $M$ diagonaliserbar.

<u>Merknad</u> For den som bruker tida til å finne eigenvektorar, oppgir vi følgande

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda=-1, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\4\\1\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda=1, \quad \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \lambda=0$$

Vi har

$$P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0\end{pmatrix}$$

(der kolonnene i $P$ er gitt ved vektorane ovanfor, men du treng jo ikkje å bestemme $P$ i denne oppgåve!)

Det er klart at $D^3 = D$, og derav $M^3 = M$

c) Skriv $v_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_1 = Mv_0$, $v_2 = M^2 v_0$, osv

Då er $v_1 = Mv_0 = M^3 v_0 = v_3 = v_5 = v_7 = \cdots v_{1001}$

$v_2 = M^2 v_0 = M^4 v_0 = v_4 = v_6 = v_8 \cdots$

Men vi treng berre at

$$v_{1001} = v_1 = Mv_0 = \begin{pmatrix}1/4\\1/4\\0\\1/4\\1/4\end{pmatrix}$$

altså inga fluge i område 3, medan dei er likt fordelt i dei andre fire områda

<u>Oppgåve 4</u> $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Det er berre spørsmål etter løysinga med initialverdi

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Men dette er "opplagt" ein eigenvektor svarande til eigenverdi $\lambda = -1$ for $A$ (sidan radsummen er lik $-1$ for kvar rad i $A$). Difor

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Merknad</u> $A$ er symmetrisk og difor diagonaliserbar, så hvis du ser deg nødt til å finne 3 lineært uavhengige eigenvektorar og derav diagonalisere,

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Så er det ganske enkelt å kalkulere;

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda = -1, \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longleftrightarrow \lambda = 2$$

altså $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$

Då kan du sette opp den generelle løysing og få

$$x(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

, og initialbetingelsen gir $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$

Oppgåve 5 a) $A_\theta$ er reell, så $A_\theta^* = A_\theta^T = A_{-\theta}$

Sidan $A_\theta \cdot A_\theta^T = A_\theta^T A_\theta$, er $A_\theta$ normal, og difor unitert diagonaliserbar.

Karakteristisk polynom:

$$P(t) = \det(\cancel{A_\theta} - \lambda I) = \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}\\ \lambda_2 &= \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}\end{aligned}\right\}\text{ eigenverdiar}$$

For alle $\theta$ kan vi bruke følgande eigenvektorar av lengd 1:

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_1, \quad \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_2$$

, derav $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$

No kan du sjekke at

$$P^{-1} A_\theta P = P^* A_\theta P = D \qquad (*)$$

b) $$A_\theta\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = B_{-}$$

(i) For å grunngi at $A_{\theta_1}A_{\theta_2} = A_{\theta_1+\theta_2}$ kan ~~du~~ du for eksempel seie at $A_\theta$ er standard matrisa til den lin. transformasjonen som roterer xy-planet om origo med vinkelen $\theta$. Når du roterer med vinkelen $\theta_1$ og deretter $\theta_2$ (eller omvendt) blir difor sluttresultatet ein rotasjon med vinkel $\theta_1+\theta_2$.

(ii) Alternativt kan du bruke diagonaliseringa (*) og (vanlege) reknereglar for eksponentialfunksjonen $\theta \to e^{i\theta}$, eller også bruke trigonometri, nemleg

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

Skriv då $D_\theta$ for matrisa $D$, slik at

$$A_{\theta_1} = PD_{\theta_1}P^{-1}, \quad A_{\theta_2} = PD_{\theta_2}P^{-1}$$

, derav $A_{\theta_1}A_{\theta_2} = PD_{\theta_1}D_{\theta_2}P^{-1} = PD_{\theta_1+\theta_2}P^{-1}$
$$= A_{\theta_1+\theta_2}$$

[Poenget er altså at $D_{\theta_1}D_{\theta_2} = D_{\theta_1+\theta_2}$ ]

Tilslutt, merk at $B_\theta$ er symmetrisk, med eigenverdiar $\pm 1$; det er ei refleksjonsmatrise. Vi søker ei ortogonal matrise $C_\theta = C$ slik at

$$C_\theta^{-1}B_\theta C_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Vi skriv her $C_\theta$ sidan $C$ ~~kanskje~~ kanskje er avhengig av $\theta$.]

Ortogonale matriser med determinant 1 er nettopp av type $A_\varphi$, så la oss sette $C = A_\varphi$ og bestemme vinkelen $\varphi$:

$$A_\varphi^{-1} B_\theta A_\varphi = A_{-\varphi}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}A_\theta A_\varphi = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}A_\varphi A_\theta A_\varphi$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}A_{\theta+2\varphi}$$

For at dette skal bli $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ velger vi $\varphi = -\frac{\theta}{2}$, altså

$$A_{\frac{\theta}{2}} B_\theta A_{-\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

SLUTT