Løsningsforslag til eksamen i MA1202/MA6202 *Lineær algebra med anvendelser* våren 2009.

Oppgave 1

a) Rangen til A er lik antallet pivotkolonner i trappeformen R. Følgelig har A rang 3. Nulliteteten til A er da antallet "ikke-pivotkolonner i R. D.v.s 2.

Her kan en også går mere direkte på definisjonene, og finne basiser for radrom og nullrom, og bestemme rang og nullitet utifra dette. Eventuelt kan en også referere til dimensjonsteoremet.

b) Kjernen til T_A er identisk med nullrommet til A, som igjen er identisk med nullrommet til R.

For å beskrive nullrommet til R må vi se på ligningen $R\mathbf{x} = 0$, der $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$. Den generelle løsningen avhenger av to frie variabler, s, t, og vi setter

$$x_3 = s \quad x_5 = t.$$

Den første raden i R gir ligningen

$$x_1 + x_3 - x_5 = 0 \quad \text{i.e.} \quad x_1 = t - s.$$

Den andre raden i R gir

$$x_2 + x_3 = 0 \quad \text{i.e.} \quad x_2 = -s.$$

Den tredje raden i R gir

$$x_4 + x_5 = 0 \quad \text{i.e.} \quad x_4 = -t.$$

(Den fjerde raden i R gir $0 = 0$.)

Dermed kan vi skrive den generelle løsningen av $R\mathbf{x} = 0$ som

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Dermed er

$$\left\{\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T\right\} \tag{1}$$

en basis for $\ker(T_A) = \mathrm{Null}(A) = \mathrm{Null}(R)$

$\mathrm{R}(T_A) = \mathrm{Col}(A)$, så det holder altså å finne en basis for kolonnerommet til A. Kolonnevektorene i A som svarer til pivotkolonner i R utgjør en basis for $\mathrm{Col}(A)$. Dermed kan vi slå fast at

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^T\right\} \tag{2}$$

en basis for $\mathrm{R}(T_A)$

c) Vi bruker her Gram-Schmidt-fremgangsmåten. Startpunktet er vektorene $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 1, -1)$ og $\mathbf{u}_3 = (2, 0, 0, 2)$, som utgjør en basis for kolonnerommet til A. Vi gjør følgende

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$
- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - 0\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2$
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_3 - \frac{0}{4}\mathbf{v}_2 - \frac{4}{4}\mathbf{v}_1 = (1, -1, -1, 1)$

Vi ser at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ har lengde 2. Vi normaliserer disse, og ser at vektorene

$$(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), \quad (1/2, -1/2, 1/2, -1/2), \quad (1/2, -1/2, -1/2, 1/2).$$

utgjør en ortonormal basis for bildet til T_A.

Oppgave 2

a) Måling nr i gir oss ligningen

$$ax_i + b = y_i.$$

Dette gir oss tre ligninger som skal bestemme a, b. Vi kan skrive dette som

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

Der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}^T$ representerer de ukjente, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$ og

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Dere kan se direkte på de to første radene i dette systemet at systemet ikke er konsistent. Som oppgaven antyder, benytter vi oss av minste kvadraters metode. D.v.s, vi løser normalligningene

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Nå er

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

og

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Her leser vi av løsningen

$$a = -1/2 \quad b = 2.$$

b)

$$\mathbf{p}_1 = P\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}.$$

Stabile tilstandsvektorer $\mathbf{p}$ er karakterisert ved ligningen

$$P\mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \text{i.e.} \quad (P - I)\mathbf{p} = 0.$$

Vi løser nå denne ligningen ved radoperasjoner.

$$\begin{aligned} P - I &= \begin{bmatrix} -.75 & .5 \\ .75 & -.5 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -.75 & .5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En mulig løsning av ligningen er vektoren $(1/2, 3/4)$. Summen av komponentene i denne vektoren er $5/4$. Vi multipliserer dermed den beskrevne løsningen med $4/5$, og får vektoren

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix},$$

som er en løsning av ligningen, og i tillegg en godkjent tilstandsvektor.

Det er flere måter å se på spørsmålet om det finnes flere stabile tilstandsvektorer.

- Nullrommet til $P - I$ har dimensjon 1. Dermed kan det kun finnes 1 vektor med komponentsum 1.
- Vi kan se på den stabile tilstandsvektoren som en løsning av ligningssystemet

  $$-.75p_1 + 0.5p_2 = 0, \quad p_1 + p_2 = 1.$$

  Dette systemet har 1 unik løsning, siden systemet har rang 2.

Oppgave 3

a) Første kolonne i A:

$$[T(1)]_{\mathcal{S}} = [T_2(T_1(1))]_{\mathcal{S}} = [T_2(x \cdot 1)]_{\mathcal{S}} = [1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andre kolonne i A:

$$[T(x)]_{\mathcal{S}} = [T_2(x \cdot (x+1))]_{\mathcal{S}} = [2x+1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tredje kolonne i A:

$$[T(x^2)]_{\mathcal{S}} = [T_2(x \cdot (x^2+2x+1))]_{\mathcal{S}} = [3x^2+4x+1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Altså er matrisen A det den utgir seg for å være.

b) Siden A er triangulær, kan vi lese egenverdiene direkte av diagonalen. De er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Denne matrisen har følgelig tre distinkte egenverdier. Vi kan dermed finne tre lineært uavhengige egenvektorer for A. Disse utgjør da en basis for $\mathbb{R}^3$, og gir en diagonalisering av A.

Egenvektor tilhørende λ_1:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_1.

egenvektor tilhørende λ_2:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_2.

egenvektor tilhørende λ_3:

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}^T$ en egenvektor tilhørende λ_3.

Dermed er

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \tag{3}$$

en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A.

c) Her skal vi dra nytte av kunnskap om forholdet mellom egenskaper til vektorer og deres kooridnatvektorer.

En vektor er en egenvektor for en operator hvis og bare hvis koordinatvektoren uttrykt i en basis $\mathcal{B}$ er en egenvektor for matrisen til operatoren i den samme basisen $\mathcal{B}$. Vektoren og koordinatvektoren tilhører i så fall samme egenverdi.

Punkt (3) gir oss egenvektorene for matrisen $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}}$. De korresponderende vektorene i P_2 er da egenvektorer for T. Vi finner disse på følgende måte:

Vektoren $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_1(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1,$$

$\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_2(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 + x$$

og $\mathbf{x}_3$ er koordinatvektoren til polynomet

$$p_3(x) = 5 \cdot 1 + 8 \cdot x + 2 \cdot x^2 = 5 + 8x + 2x^2.$$

Dette gir oss en basis

$$\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$$

for P_2 bestående av egenvektorer for T.

La oss nå finne matrisen til T i denne basisen. Første kolonne:

$$[T(p_1(x))]_{\mathcal{B}} = [p_1(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Andre kolonne:

$$[T(p_2(x))]_{\mathcal{B}} = [2 \cdot p_2(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tredje kolonne:

$$[T(p_3(x))]_{\mathcal{B}} = [3 \cdot p_3(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

En kan eventuelt begrunne dette svaret med at $\mathcal{B}$ er en basis for P_2 bestående av egenvektorer for T. I den situasjonen er $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ en diagonal matrise med egenverdiene langs diagonalen.

Oppgave 4 Her er det mest praktisk å bruke notasjonen $\sin(t)$ både for funksjonen sin og verdien til denne funksjonen i punktet t. Vi blander disse størrelsene notasjonsmessig. Så er det desto viktigere å huske når vi mener hva.

a) For å begrunne at vi har med et indreprodukt å gjøre, går vi gjennom aksiomene som reelle indreprodukt må tilfredstille:

Symmetri: For $f, g \in C[0,\pi]$ er

$$\langle f, g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)f(t)dt = \langle g, f\rangle.$$

Følgelig er symmetriaksiomet oppfylt.

Additivitet: For $f_1, f_2, g \in C[0,\pi]$ er

$$\begin{aligned}\langle f_1 + f_2, g\rangle = &\\ &\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (f_1(t)+f_2(t))g(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1(t)g(t)dt + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_2(t)g(t))dt \\ =&\langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle.\end{aligned}$$

Additivitetsaksiomet er altså oppfylt.

Linearitet: For $f, g \in C[0,\pi]$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ er

$$\langle \alpha f, g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \alpha f(t)g(t)dt = \alpha\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)dt = \alpha\langle f, g\rangle.$$

Linearitetsaksiomet er altså oppfylt.

Positivitet: Hvis $f \in C[0,\pi]$, så er

$$\langle f, f\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)^2 dt$$

Dette er et intgral med en positiv kontinuerlig integrand f^2. Slike integral er er positive. Følgelig er $\langle f, f\rangle \geq 0$ for alle $f \in C[0,\pi]$. Videre er slike integral lik 0 hvis og bare hvis integranden er konstant lik 0.

Følgelig gjelder positivitetsaksiomet:

$$\langle f, f\rangle \geq 0 \quad \text{og} \quad \langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Noen vil kanskje huske at positivitetsaksiomet kan uttrykkes på ulike måter. Faglærer synes utsagnet

$$\langle f, f\rangle > 0 \quad \text{når} \quad f \neq 0.$$

er det fyndigste. Det er ikke ekvivalent med det utsagnet som står i boka, men gir en ekvivalent mengde aksiomer.

b) Her er halve oppgaven å omformulere oppgaven til noe som vi kan håndtere.

La $W = Span\{\sin(t), \sin(3t)\}$, og $f \in C[0\pi]$ være funksjonen som er konstant lik 1. Villkårlige elementer i W kan skrives som $g(t) = a\sin(t) + b\sin(3t)$. Integralet i oppgaven kan skrives som

$$\frac{\pi}{2}||f - g||.$$

Oppgaven er nå som følger: Finn en $g \in W$ slik at $||f - g||$ er minimal. *Best approximation theorem* forteller oss at $g = \text{proj}_W f$ løser dette problemet. Siden $\{\sin(t), \sin(3t)\}$ er en ortonormal basis for W, kan vi bruke formelen

$$g = \text{proj}_W f = \langle f, \sin(t)\rangle \sin(t) + \langle f, \sin(3t)\rangle \sin(3t) = a\sin(t) + b\sin(3t)$$

til å finne g.

Nå er

$$\langle f, \sin\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)dt = \frac{4}{\pi}$$

$$\langle f, \sin(3t)\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(3t)dt = \frac{4}{3\pi}.$$

Dermed ser vi at verdiene $a = \frac{4}{\pi}$ og $b = \frac{4}{3\pi}$ minimerer det gitte integralet.

Faglærer hevder at dette er den eneste fornuftige måten å løse dette problemet på. Når vi kjenner det kraftulle *beste-tilnærming-teoremet*, er det unødvendig å kaste bort tiden på store kløнete beregninger.

Til *skrekk og advarsel* følger en liste over tåpelige metoder:

I man kan bruke formler for fourierkoeffesienter. Men, da må man huske på å bruke et annet indreprodukt enn det vi er vant med fra læreboka. Her er det lett å surre. For å unngå dette: Abtraher problemet, og bruk projeksjoner, nøyaktig slik vi gjør i alle andre indreproduktrom.

En kunne også se på integralet som en deriverbar funksjon av a, b. Minimumspunktet vil da være et kritisk punkt, d.v.s et punkt der de partielle deriverte er lik 0.

Det finnes mange måter å utføre denne strategien, en kan gange ut integrasjonskjernen, integrere og så derivere. Dette vil i prinsippet føre fram.

Noe bedre vil det være å bruke indreproduktnotasjonen og de tilhørende regnereglene, og så minimere

$$\begin{aligned}&\langle 1 - a\sin(t) - b\sin(3t), 1 - a\sin(t) - b\sin(3t)\rangle = \\ &\langle 1, 1\rangle + a^2\langle \sin(t), \sin(t)\rangle + b^2\langle \sin(3t) + 2a\langle 1, \sin(t)\rangle + 2b\langle 1, \sin(3t)\rangle + 2ab\langle \sin(t), \sin(3t)\rangle,\end{aligned}$$

der det siste leddet er lik 0, pga ortogonaliteten. I dette uttrykket kan vi sette inn verdiene av de ulike indreproduktene, og så finne de partiellderiverte.

En kan også derivere inne i integraltegnet:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\pi (1 - a\sin(t) - b\sin(3t))^2 dt \\ &\qquad = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a}(1 - a\sin(t) - b\sin(3t))^2 dt \\ &\qquad = \int_0^\pi 2(1 - a\sin(t) - b\sin(3t))\sin(t) dt \\ &\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

Det finnes sikkert enda flere måter å gjøre dette på, men nå er det vel nok.

Oppgave 5

a) Vi kan sjekke at $A^T A = AA^T$, og av dette slutte at A er *normal*. Slike matriser er unitært diagonaliserbare. (Dette er et hovedpunkt i lærebokas kapittel 10.6.)

b) Vi starter med å finne egenverdiene til A utifra den karakteristiske ligningen

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0.$$

Altså

$$(a-\lambda)^2 = -b^2, \quad \text{i.e.} \quad a - \lambda = \pm ib.$$

Dette gir oss egenverdiene $\lambda_1 = a + ib$ og $\lambda_2 = a - ib$.

Nå finner vi egenvektorer:

Egenvektorer tilhørende λ_1:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^T$.

Egenvektorer tilhørende λ_2:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} ib & -b \\ b & ib \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} i & 1 \end{bmatrix}^T$.

Nå har vi en ortogonal basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ for $\mathbb{C}^2$. Normerer vi denne, og bruker de resulterende vektorene som kolonner i en matrise U, får vi den unitære matrisen som diagonaliserer A. Det kan vi kontollere ved å se at

$$U^H U = I \quad \text{og} \quad U^H A U = \begin{bmatrix} a + ib & 0 \\ & a - ib \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6 Her gjøres rede for en kompleks utgave av denne oppgaven. Oversettelse til løsningsforslag for eksamensoppgaven: Substituer inn *ortogonal* for *unitær*, T for H og *symmetrisk* for *normal.*

Denne oppgaven var ganske utfordende, så ikke fortvil om du ikke kom i mål.

a) Unitær diagonaliserbarhet er ekvivalent med normalitet (se kap 10.6). Det skal altså holde å sjekke at $A^H A$ er normal[1]. Det gjør vi direkte ved

$$(A^H A)^H (A^H A) = (A^H A)(A^H A) = (A^H A)(A^H A)^H.$$

$A^H A$ er altså *normal.*

Hvordan kan vi lære noe om egenverdiene til $A^H A$? Anta at $A^H A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Bruker vi det euklidske indreproduktet på $\mathbb{C}^n$, får vi

$$\langle \mathbf{x}, A^H A\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H A^H A\mathbf{x} = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = ||A\mathbf{x}||^2.$$

Men, vi har ennå ikke brukt at $\mathbf{x}$ er en egenvektor. Det må vi utnytte nå:

$$\langle \mathbf{x}, A^H A\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle = \lambda||\mathbf{x}||^2.$$

[1] Her kan en også rett og slett slå fast at $A^H A$ er hermitesk, og at hermiteske matriser er unitært diagnoaliserbare (fordi de er normale) med reelle egenverdier (fordi de er hermiteske).

Dermed må

$$\lambda = \frac{||A\mathbf{x}||^2}{||\mathbf{x}||^2},$$

et reelt tall større enn eller lik 0.

Alle egenverdiene til $A^H A$ er altså reelle tall større enn eller lik 0.

b) $\mathbf{x} \in \text{Null}(A)$ impliserer at $A\mathbf{x} = 0$. Men, dette impliserer igjen at $A^H A\mathbf{x} = 0$, og dermed at $\mathbf{x} \in \text{Null}(A^H A)$

$\mathbf{x} \in \text{Null}(A^H A)$ impliserer at $A^H A\mathbf{x} = 0$. I så fall er $\mathbf{x}^H(A^H A\mathbf{x}) = 0$, og følgelig må $(A\mathbf{x})^H(A\mathbf{x}) = 0$, noe som impliserer at $A\mathbf{x} = 0$, altså $\mathbf{x} \in \text{Null}(A)$.

Vi har nå sett at $\mathbf{x} \in \text{Null}(A)$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} \in \text{Null}(A^H A)$. Disse rommene er altså identiske.

Alternativ:. Husk at $\text{Null}(A^H) = \text{Row}(A^H)^\perp = \text{Col}(A)^\perp$. Dermed er $A^H A\mathbf{x} = 0$ hvis og bare hvis $A\mathbf{x} \in \text{Col}(A)^\perp$. Men, $A\mathbf{x} \in \text{Col}(A)$, så dette er ekvivalent[2] med at $A\mathbf{x} = 0$. Vi har nå sett at

$$A^H A\mathbf{x} = 0 \quad \text{hvis og bare hvis} \quad A\mathbf{x} = 0.$$

Dette er ekvivalent med at $\text{Null}(A^H A) = \text{Null}(A)$.

At matrisene har samme rang følger direkte av dimensjonsteoremet. Husk at $A^H A$ og A har like mange kollonner.

c) A og $A^H A$ har begge n kolonner. Dimensjonsteoremet sier i denne situajonen at

$$\text{nullitet}(A) + \text{rang}(A) = \text{nullitet}(A^H A) + \text{rang}(A^H A). \tag{4}$$

I forrige oppgave så vi at A og $A^H A$ har samme nullrom. De har altså samme nullitet. Av dette og (4) følger det at A og $A^H A$ har samme rang. Vi behøver altså bare å vise at $r = \text{rang}(A^H A)$.

Hvis vi er familiære med similaritetsinvarianter, kan vi argumentere på følgende måte: $A^H A$ er similær med en diagonalmatrise med egenverdiene til $A^H A$ langs diagonalen. Denne diagonalmatrisen har rang $r =$ (antallet egenverdier for $A^H A$ som er forskjellige fra 0). Nå er rangen en similaritetsinvariant. Følgelig er $\text{rang}(A^H A) = r$

Hvis en ikke er familiær med similaritetsinvarianter, kan en argumentere på følgende måte: Fra diagonalisering av en normal matrise B kan vi skaffe oss en unitær matrise U og en diagonal matrise D slik at $U^H BU = D$. Dette kan vi skrive som $BU = UD$.

Rangen til B er lik rangen til BU, siden $\text{Col}(B) = \text{Col}(BU)$. (Hvorfor er det slik? Anta at $w \in \text{Col}(B)$. Da finnes en vektor v slik at $w = Bv$. La nå $v' = U^H v$. Da

[2] Det finnes bare en vektor som ligger både i W og $W^\perp$; nullvektoren.

er $w = Bv = BUU^h v = BUv'$. Altså er $w \in \mathrm{Col}(BU)$. Altså er $\mathrm{Col}(B) \subseteq \mathrm{Col}(BU)$. Tilsvarende ser man at $\mathrm{Col}(BU) \subseteq \mathrm{Col}(B)$.)

Rangen til D er lik rangen til UD, siden $\mathrm{Row}(D) = \mathrm{Row}(UD)$. (Hvorfor? $\mathrm{Row}(D) = \mathrm{Col}(D^T) = \mathrm{Col}(D^T U^T)\mathrm{Row}(UD)$, siden vi kan bruke argumentet over på matrisene D^T og U^T istedenfor B og U).

Siden $BU = UD$ viser dette at rangen til B er lik rangen til D i en slik diagonalisering.

Nå gjenstår det bare å anvende dette på vårt konkret tilfelle, der D er en diagonalmatrise med r elementer som er forskjellige fra 0. En slik matrise har rang r. Følgelig er

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^H A) = \mathrm{rang}(D) = r = \text{ antall egenverdier i } A^H A \text{ som er forskjellige fra 0.}$$

Hvis en vil gjøre dette på en tredje måte– kanskje den beste (?) – kan en observere at egenverdien $\lambda = 0$ må ha geometrisk multiplisitet $n - r$: Vi kan nemlig finne n lineært uavhengige egenvektorer for $A^H A$, der de r første tilhører egenverdier som er forskjellige fra 0; de $n - r$ siste egenvektorene tilhører da egenverdien 0. Egenrommet tilhørende $\lambda = 0$ har altså dimensjon $n - r$.

Nå er $\mathrm{Null}(A^H A)$ identisk med egenrommet tilhørende $\lambda = 0$. Dermed er $\mathrm{Null}(A^H A)$ $n - r$-dimensjonalt, og dimensjonsteoremet, samt oppgave b) gir da

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^H A) = r.$$

Hvilket skulle vises.