OPPGAVE 1:

a.) EN MENGDE $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ AV VEKTORER I ET ENDELIGDIMENSJONALT VEKTORROM V ER EN BASIS FOR V DERSOM:

(i) VEKTORENE $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ ER LIN. UAVH., DVS.

$c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n=\vec{0}$ MED $c_i\in\mathbb{R}$ FOR $i=1,2,\dots,n \Rightarrow c_i=0$ FOR $i=1,2,\dots,n$.

(ii) $\operatorname{span}(B)=V$, DVS.

HVER $\vec{v}\in V$ KAN SKRIVES SOM $\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n$ MED $c_i\in\mathbb{R}$ FOR $i=1,2,\dots,n$.

b) $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ ER EN BASIS FOR V

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ HVER $\vec{v}\in V$ KAN SKRIVES SOM $\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n$ MED $c_i\in\mathbb{R}$ FOR $i=1,2,\dots,n$

$\Rightarrow$ MÅ VISE AT DENNE REPRESENTASJONEN ER ENTYDIG.

ANTA AT UTSAGN ER FEIL

$\Rightarrow$ DET FINNES (I DET MINSTE) EN VEKTOR $\vec{v}\in V$ SOM HAR TO REPRESENTASJONER

$\Rightarrow \exists c_1,c_2,\dots,c_n,d_1,d_2,\dots,d_n\in\mathbb{R}$ SLIK AT

$\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n$

$\vec{v}=d_1\vec{v}_1+d_2\vec{v}_2+\dots+d_n\vec{v}_n$

OG $c_i\neq d_i$ FOR NOEN $i\in\{1,2,\dots,n\}$

$$\Rightarrow \vec{0}=\vec{v}-\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n-d_1\vec{v}_1-d_2\vec{v}_2-\dots-d_n\vec{v}_n$$
$$=(c_1-d_1)\vec{v}_1+(c_2-d_2)\vec{v}_2+\dots+(c_n-d_n)\vec{v}_n.$$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} c_i-d_i=0 \ \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$

$\Rightarrow c_i=d_i \ \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$ $\lightning$ ($c_i\neq d_i$ FOR NOEN $i\in\{1,2,\dots,n\}$)

$\Rightarrow$ HVER $\vec{v}\in V$ KAN SKRIVES SOM

$\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n$

MED $c_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$ PÅ EN ENTYDIG MÅTE.

OPPGAVE 1:

c.) EN MENGDE $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ AV VEKTORER I ET n-DIM INDREPRODUKTROM V ER EN ORTONORMAL BASIS FOR V DERSOM:

(iii): B ER EN BASIS FOR B, DVS

B OPPFYLLER (i) OG (ii) I (a).

(iv) B ER EN ORTONORMAL MENGDE, DVS

·) $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ FOR $1 \leq i, j \leq n$ OG $i \neq j$

·) $\|\vec{v}_i\|^2 = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 1$ FOR $i = 1, 2, \dots, n$.

B ER EN ORTONORMAL BASIS FOR V

$\overset{1b.)}{\Longrightarrow}$ HVER $\vec{v} \in V$ KAN SKRIVES SOM $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$ MED $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ PÅ EN ENTYDIG MÅTE

$\Rightarrow$ MÅ VISE AT $c_i = \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle$.

LA $\vec{v} \in V$ MED $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{v}_j$ $(c_i \in \mathbb{R}$ FOR $i = 1, 2, \dots, n)$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{v}_j, \vec{v}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_j \underbrace{\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle}_{=0} + c_i \underbrace{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}_{=1} \overset{(iv)}{=} c_i$$

$\Rightarrow$ HVER $\vec{v} \in V$ KAN SKRIVES SOM $\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle \vec{v}_n$.

OPPGAVE 2:

a.)

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_1"'] & P_1 \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "{[T]_{\tilde{B},B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "T_2"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} p(x) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T_1"'] & T(p(x)) \\ (p(x))_B \arrow[r, "{[T]_{\tilde{B},B}}"] & (T(p(x)))_{\tilde{B}} \arrow[u, "T_2."'] \end{tikzcd}$$

DVS: $T(p(x)) = T_2([T]_{\tilde{B},B}(T_1(p(x))))$ HVOR.

- T_1 ER GITT VED $T_1 : P_2 \to \mathbb{R}^3$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longrightarrow (p(x))_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ T_1 TILORDNER HVERT POLYNOM $p(x) \in P_2$ DENS KOORDINATVEKTOR MED HENSYN PÅ BASIS B $(p(x))_B$

$\rightsquigarrow$ T_1 ER EN ISOMORFI (SURJ+INJ $\rightsquigarrow$ INVERTERBAR)

MED $T_1^{-1} : \mathbb{R}^3 \to P_2$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

- T_2 ER GITT VED $T_2 : \mathbb{R}^2 \to P_1$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \longrightarrow c_0(1-x) + c_1(1+x)$$

$\rightsquigarrow$ T_2 ER EN ISOMORFI MED $T_2^{-1} : P_1 \to \mathbb{R}_2$

$$q(x) = d_0 + d_1 x \longmapsto (q(x))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \frac{d_0 - d_1}{2} \\ \frac{d_0 + d_1}{2} \end{pmatrix}$$

- $[T]_{\tilde{B},B}$ ER TRANSISJONSMATRISEN TIL T RELATIV TIL B OG $\tilde{B}$

$\rightsquigarrow$ $[T]_{\tilde{B},B}$ ER EN 2×3 MATRISE

$$[T]_{\tilde{B},B} = ((T(1))_{\tilde{B}}, (T(x))_{\tilde{B}}, (T(x^2))_{\tilde{B}})$$

$\Rightarrow$ $[T]_{\tilde{B},B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{x} \longmapsto [T]_{\tilde{B},B}\vec{x}.$$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} T(1) = 2 \cdot x \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4 = -2(1-x) - 2(1+x) \Rightarrow (T(1))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ T(x) = 2 \cdot x \cdot 1 - 4 \cdot x = -2x = 1 \cdot (1-x) - 1(1+x) \Rightarrow (T(x))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ T(x^2) = 2 \cdot x \cdot 2x - 4x^2 = 0 = 0 \cdot (1-x) + 0(1+x) \Rightarrow (T(x^2))_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [T]_{\tilde{B},B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

OPPGAVE 2.

b) $R(T) = \{T(p(x)) \mid p(x) \in P_2\}$

$= \{T(a_0 + a_1x + a_2x^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{a_0 T(1) + a_1 T(x) + a_2 T(x^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$\overset{(a)}{=} \{a_0(-4) + a_1(-2x) + a_2 \cdot 0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{-4a_0 - 2a_1x \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{b_0 + b_1x \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R}\} = P_1.$

c) •) $R(T) = P_1 \Rightarrow$ T ER SURJEKTIV

•) $T(ax^2) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \ker(T) \neq \{0\} \Rightarrow$ T ER IKKE INJEKTIV

•) T ER SURJEKTIV, MEN IKKE INJEKTIV $\Rightarrow$ T ER INGEN ISOMORFI.

d) •) $T(2x - 4x^2) = 2x(2 - 8x) - 4(2x - 4x^2) = 4x - 16x^2 - 8x + 16x^2 = 4x - 8x = -4x.$

•) $T_2([T]_{\tilde{B}, B}(T_1(2x - 4x^2)))$

$\rightsquigarrow T_1(2x - 4x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$[T]_{\tilde{B}, B} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$T_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2(1 - x) - 2(1 + x) = 2 - 2x - 2 - 2x = -4x$

$\Rightarrow T_2([T]_{\tilde{B}, B}(T_1(2x - 4x^2))) = T_2([T]_{\tilde{B}, B} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}) = T_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4x.$

HER BRUKES: $T(p(x)) = T_2([T]_{\tilde{B}, B}(T_1(p(x)))).$

e) $T: P_2 \to P_1$ $\qquad$ $\tilde{T}: P_2 \to P_2$

$p(x) \to 2xp'(x) - 4p(x)$ $\qquad$ $p(x) \to 2xp'(x) - 4p(x).$

DEN ENESTE FORSKJELLEN MELLOM T OG $\tilde{T}$ ER VERDIOMRÅDET ($P_1 \subseteq P_2$ MEN $P_1 \neq P_2$)

•) KJERNEN ER ET UNDERROM AV DEFINISJONSMENGDEN

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \ker(T) = \ker(\tilde{T}) \\ T \text{ IKKE INJ} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{T}$ IKKE INJ.

•) BILDET ER ET UNDERROM AV VERDIOMRÅDET

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} R(T) = R(\tilde{T}) \\ P_1 \subseteq P_2 \text{ MEN } P_1 \neq P_2 \\ T \text{ SURJEKTIV} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{T}$ IKKE SURJ.

OPPGAVE 3:

a.) EGENVERDIENE TIL A = NULLPUNKTER TIL DET KARAKTERISTISKE POLYNOMET $p(\lambda) := \det(\lambda I - A)$

$$\rightsquigarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & -1 \\ 0 & -9 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda-7)\left((\lambda-6)(\lambda+2)-9\right)$$
$$= (\lambda-7)\left(\lambda^2-6\lambda+2\lambda-12-9\right)$$
$$= (\lambda-7)(\lambda^2-4\lambda-21)$$
$$= (\lambda-7)^2(\lambda+3)$$

$\Rightarrow$ EGENVERDIENE TIL A: $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -3$.

IFØLGE (b) ER A DIAGONALISERBAR $\rightsquigarrow$ BASISEN FOR EGENROMMET TIL $\lambda_1 = 7$ BESTÅR AV 2 VEKTORER

BASISEN FOR EGENROMMET TIL $\lambda_2 = -3$ BESTÅR AV 1 VEKTOR.

EGENROM TIL $\lambda_1 = 7 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (7I - A)\vec{x} = \vec{0}\}$.

$$(7I-A)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 \text{ FRI} \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{MED } s,t \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ BASIS FOR EGENROMMET TIL $\lambda_1 = 7$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

EGENROM TIL $\lambda_2 = -3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (3I - A)\vec{x} = \vec{0}\}$

$$(3I-A)\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = -9x_2 \end{matrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -9s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{MED } s \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ BASIS FOR EGENROMMET TIL $\lambda_2 = -3 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}\right\}$.

b.)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(DET ER BARE ET AV FLERE MULIGE SVAR)

c.) $\det(P) = -10 \Rightarrow$ KOLONNEVEKTORENE I P ER LIN. UAVH. OG DANNER EN BASIS FOR $\mathbb{R}^3$

KOLONNEVEKTORENE I P DANNER EN ORTOGONAL BASIS FOR $\mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

MEN: $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle = -8 \Rightarrow$ KOLONNEVEKTORENE I P DANNER INGEN ORTOGONALBASIS FOR $\mathbb{R}^3$.

OPPGAVE 4)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&6&5\\2&4&8&7&7\\3&6&9&-6&-3\end{pmatrix} \text{ OG } B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ ER RADEKVIVALENT}$$

a)

$\Rightarrow \text{rank}(A)=\text{rank}(A^T)=3$ (SIDEN $\text{rank}(A)=\text{rank}(B)$)

$\text{nullity}(A)=5-3=2$

$\Rightarrow \text{nullity}(A^T)=4-3=1.$

b) BASIS FOR RADROMMET TIL $A=\{(1,2,3,4,5),(0,0,1,1,0),(0,0,0,1,1)\}$

BASIS FOR KOLONNEROMMET TIL $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\8\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\6\\7\\-6\end{pmatrix}\right\}$

BASIS FOR NULLROMMET TIL $A=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$

NULLROMMET TIL $A=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^5 \mid A\vec{x}=\vec{0}\}$
$=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^5 \mid B\vec{x}=\vec{0}\}.$

$$B\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_5=-x_4\\x_3=-x_4\\x_1=-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5=-2x_2+3x_4-4x_4+5x_4=-2x_2+4x_4.\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

OPPGAVE 5.

a)

$$A=\begin{pmatrix}8&2&-4\\2&8&-3\\6&4&-2\end{pmatrix}$$ a_{ij} ANGIR HVOR MYE R MÅ BETALE TIL C, DERSOM

·) R SITT TREKK ER i

·) C SITT TREKK ER j

$$B=-A=\begin{pmatrix}-8&-2&4\\-2&-8&3\\-6&-4&2\end{pmatrix}$$ b_{ij} ANGIR HVOR MYE C MÅ BETALE TIL R, DERSOM

·) R SITT TREKK ER i

·) C SITT TREKK ER j

$\Rightarrow$ FORVENTET AVKASTNINGEN FOR R:

$$E(p,q)=pBq=\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}-8&-2&4\\-2&-8&3\\-4&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}-5\\-5\\-5\end{pmatrix}=-5$$

FORVENTET AVKASTNING FOR C

$$-E(p,q)=-pBq=5$$

DVS: I DET LANGE LØP BETALER R 5 TIL C PER SPILL (I GJENNOMSNITT)

(DET ER OGSÅ MULIG Å REGNE UT pAq OG GANGE RESULTATET MED -1)

b) AVKASTNINGSMATRISEN $A = (a_{ij})$

$\Rightarrow E(p,q) = pAq$

p^*, q^* OPTIMALE STRATEGIER BETYR: $E(p,q^*) \leq E(p^*,q^*) \leq E(p^*,q)$

VET a_{ij} ER EN SADELPUNKT HVIS: a_{ij} ER MINST I SIN RAD
OG STØRST I SIN KOLONNE

$\Rightarrow a_{33} = -2$ ER DET ENESTE SADELPUNKTET

$\Rightarrow$ DEN OPTIMALE STRATEGIEN FOR R: $p^* = (0,0,1)$

C: $q^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ SPILLETS VERDI $E(p^*,q^*) = p^* A q^* = -2$

OBS: HVIS DU TAR UTGANGSPUNKTET I AVKASTNINGSMATRISEN $-A$, SÅ ER $E(p,q) = -pAq$.

$-A$ HAR INGEN SADELPUNKT, MEN DET ER MULIG TIL Å KOMME FREM TIL EN OPTIMAL STRATEGI VED HJELP AV

$$E(p,q^*) \leq E(p^*,q^*) \leq E(p^*,q)$$

$\leadsto q^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ OG $p^* = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{pmatrix}$ MED $0 \leq p_1^* \leq \frac{1}{2}$

$p_2^* = \frac{1}{4}(1+2p_1^*)$

$p_3^* = \frac{3}{4}(1-2p_1^*)$