Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Per Hag (73 59 17 43)

EKSAMEN I GEOMETRI (MA2401/MA6401)

Tirsdag 19. mai 2009
Tid: 09:00 – 13:00, Sensur 15.06.09

Hjelpemidler: Kode D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler til latt. Enkel kalkulator (HP30S) tillatt. Linjal og passer tillatt.

Oppgave 1
(NØYTRAL GEOMETRI)

a) Hva forstår man ved en metrikk (avstand) i nøytral geometri? Hva forstår man ved en koordinatfunksjon til en gitt linje?

b) La l være linjen gitt ved:

$$y = 2x + 5$$

i det kartesiske planet $\mathbb{R}^2$. Avstanden mellom to punkter $P = (x_1, y_1)$ og $Q = (x_2, y_2)$ er gitt ved:

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

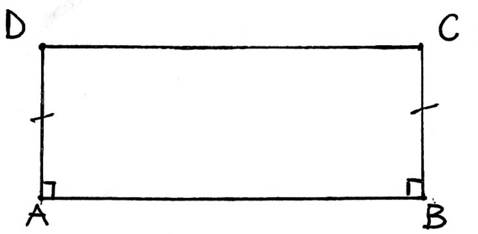
Bevis at da er

$$f(x, y) = x\sqrt{5}$$

en koordinatfunksjon for linjen l .

Oppgave 2
(NØYTRAL GEOMETRI)

a) Hva forstår man ved et Saccheri-kvadrilateral?



b) Skriv opp SAS-postulatet

Bevis at diagonalene $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ i et Saccheri-kvadrilateral er kongruente.

c) Bevis at vinklene $\angle ADC$ og $\angle BCD$ i et Saccheri-kvadrilateral er kongruente. Hvilke aksiomer/teoremer inngår i beviset?

d) La M og N betegne midtpunktene på henholdsvis $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$. Bevis at $\overleftrightarrow{MN}$ er en fellesnormal for $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{CD}$.

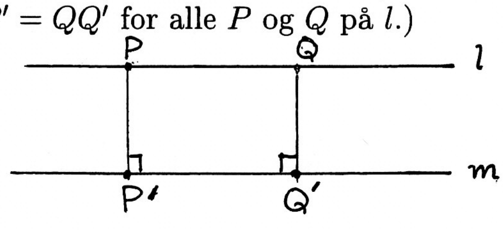
e) Bevis at et Saccheri-kvadrilateral er et parallellogram. Hvilke teorem benyttes i beviset?

Oppgave 3
(EUKLIDSK GEOMETRI)

a) Skriv opp alternativ-indre-vinkel-teorem (AIVT). Bevis kreves ikke. Bevis det motsatte av AIVT v.h.a. det euklidske (Hilberts) parallellpostulat.

b) Bevis at motstående sider i et parallellogram er kongruente.

c) Bevis at dersom l og m er parallelle linjer så vil avstanden fra l til m være konstant. (d.v.s. at $PP' = QQ'$ for alle P og Q på l.)



Oppgave 4
(HYPERBOLSK GEOMETRI)

a) Beskriv *kort* tre modeller for hyperbolsk geometri: Beltrami-Klein-modellen, Poincarés halvplan-modell og Poincarés disk-modell. Illustrer ved figurer at det hyperbolske parallell-postulat gjelder i hver av de tre modellene.

b) Bevis at dersom l og m er parallelle linjer, så finnes det høyst to punkter på l som har samme avstand til m.

c) Hvilken viktig konklusjon kan man trekke av det faktum at det er mulig å lage modeller for hyperbolsk geometri som baserer seg på at euklidsk geometri er logisk konsistent?

AWWE

Ⓐ

Løsning

EKSAMEN I GEOMETRI (MA 2401/MA 6401)

Tirsdag 19. mai, 2009

OPPGAVE 1 (NØYTRAL GEOMETRI):

(a) I følge Def. 5.4.8 er en metrikk en funksjon: $d : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ som oppfyller:

1. $d(P,Q) = d(Q,P)$ for alle P,Q
2. $d(P,Q) \geq 0$ for alle P,Q
3. $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

(Trekant-ulikheten kreves ikke fordi den kan bevises ut fra andre aksiomer.)

Ved en koordinatfunksjon for en linje ℓ forstår vi en bijeksjon:

$$f : \ell \to \mathbb{R}$$

s.a. $PQ = |f(P) - f(Q)|$.

(b) $f(x,y) \overset{m.def}{=} x\sqrt{5}$, $(x,y) \in \ell$

(i) f er injektiv:

$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow \sqrt{5}\cdot x_1 = \sqrt{5}\,x_2$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$. Siden $y_1 = 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 = y_2$, er altså $\underline{(x_1,y_1) = (x_2,y_2)}$.

(ii) f er surjektiv:

r vilkårlig reelt tall. Velger $(x,y) = (\frac{r}{\sqrt{5}}, 2\frac{r}{\sqrt{5}} + 5)$ og får:

$$f(x,y) = \frac{r}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5} = \underline{r}$$

(iii) $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = \underline{\sqrt{5}\,|x_1 - x_2|}$ for $P = (x_1,y_1)$ og $Q = (x_2,y_2)$. Vi har da:

$$PQ = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{1/2} = [(x_1-x_2)^2 + (2x_1-2x_2)^2]^{1/2} = \underline{|x_1-x_2|\sqrt{5}}$$

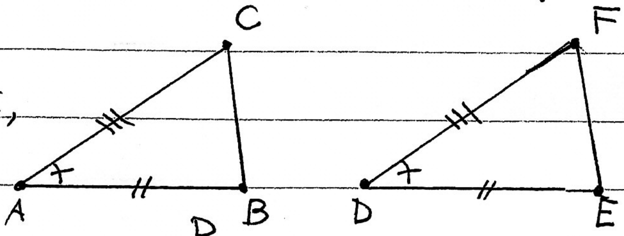
(B)

LØSNING:

OPPG. 2 (NØYTRAL GEOMETRI):

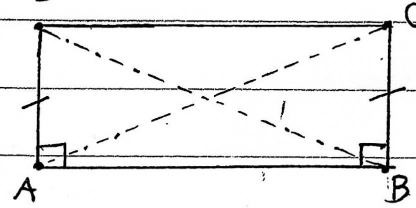
(a) Vi krever at $\angle DAB$ og $\angle ABC$ begge er rette og at $AD = BC$. (Se figur!)

(b) SAS-postulatet:



Dersom $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ og $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, så vil:

$$\triangle ABD \cong \triangle DEF.$$



Vi påstår at

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC$$

figur her!

ut fra SAS-postulatet. Vi har nemlig: $\angle DAB \cong \angle CBA$ fordi begge er rette ut fra definisjonen av Saccheri-kvadrilateral. Av samme grunn er $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, og dessuten er

$$\overline{AB} \cong \overline{BA}.$$

Altså har vi at $\overline{DB} \cong \overline{CA}$.

(c) Vi påstår så at

$$\triangle BCD \cong \triangle ADC$$

ved SSS-kriteriet. Vi har nemlig $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{DC} \cong \overline{CD}$ og $\overline{BD} \cong \overline{AC}$ (fra (b))

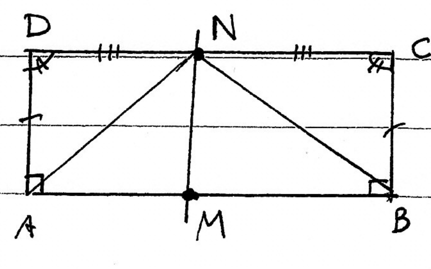
Men da følger spesielt at:

$$\angle ADC \cong \angle BCD$$

SSS-kriteriet:

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er s.a. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ og $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, så vil

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



(d) Vi beviser først at $\triangle NBC \cong \triangle NAD$ ved

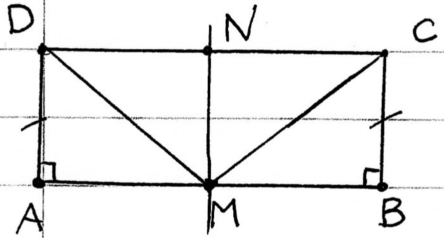
(c)

SAS. Vi har nemlig at $\overline{DN} \cong \overline{CN}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ og $\angle ADN \cong \angle BCN$ fra (c).
Dette gir spesielt at $\overline{AN} \cong \overline{BN}$
Dette gir i neste omgang at

$$\triangle ANM \cong \triangle BNM$$

ved SSS-kriteriet. (Har jo at $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ og $\overline{NM} \cong \overline{NM}$.)
Siden $\angle AMN \cong \angle BMN$ og disse er supplementærvinkler, må $\overleftrightarrow{NM} \perp \overleftrightarrow{AB}$.
Det gjenstår å bevise at:

$$\overleftrightarrow{NM} \perp \overleftrightarrow{CD}$$



Vi observerer først at:

$$\triangle DAM \cong \triangle CBM$$

siden $\overline{DA} \cong \overline{CB}$, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ og $\angle DAM \cong \angle CBM$ (SAS). Altså følger det at

$$\overline{DM} \cong \overline{CM}$$

SSS-teoremet gir da at

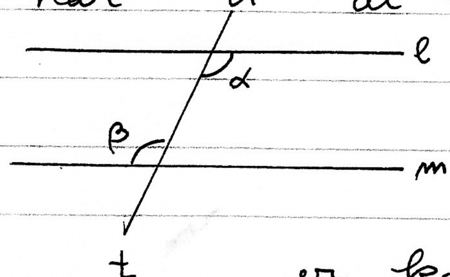
$$\triangle DMN \cong \triangle CMN$$

siden $\overline{DN} \cong \overline{CN}$, $\overline{NM} \cong \overline{NM}$ og $\overline{DM} \cong \overline{CM}$.
Altså er

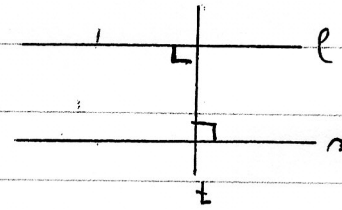
$$\angle DNM \cong \angle CNM.$$

Siden disse vinkler dessuten utgjør et lineært par (er supplement-vinkler) så må begge være rette. Altså er $\overleftrightarrow{MN}$ en felles-normal til $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{CD}$.

(e) Fra AIVT (alternativ-indre-vinkel-teoremet) har vi at hvis l og m skjæres av transversalen t og de alternative indre vinkler α og β er kongruente, så er $l \parallel m$.

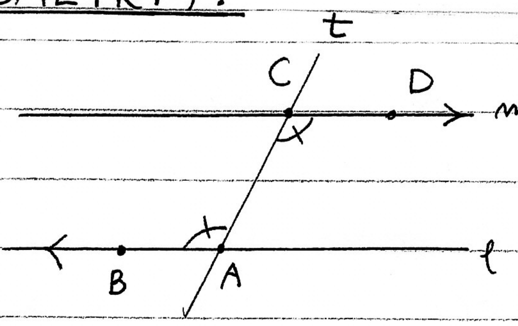


Spesielt har vi at dersom to linjer har en felles-normal må linjene være parallelle.



Under punkt (d) har vi bevist at $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{CD}$ har fellesnormalen $\overleftrightarrow{MN}$. Altså vil $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{AB}$ er pr. definisjon en fellesnormal for $\overleftrightarrow{AD}$ og $\overleftrightarrow{BC}$. Altså er $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Altså er $\square ABCD$ et parallellogram. Vi har benyttet AIVT i beviset.

OPPG. 3 (EUKLIDSK GEOMETRI):



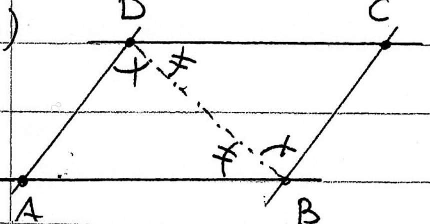
(a) Se oppg. 1 (e).
Det motsatte av AIVT: Hvis linjene l og m er parallelle og t er en linje som skjærer både l og m (t er en transversal), så må vinklene $\angle BAC$ og $\angle DCA$ være kongruente. (Det samme gjelder selvsagt også for det andre par av alternative indre vinkler.)

(E)

BEVIS:

Bare *en* linje gjennom C er parallell med l. Samtidig vet vi fra AIVT at dersom $\angle BAC \cong \angle DCA$, så er $\overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Altså må $\angle BAC \cong \angle DCA$ for at l og m skal være parallelle.

(b)



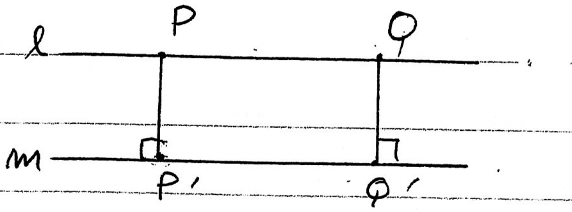
Ut fra det motsatte av AIVT og det faktum at $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ må $\angle ADB \cong \angle CBD$. Siden $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ må $\angle ABD \cong \angle CDB$ av samme grunn. Videre er $\overline{DB} \cong \overline{BD}$. Fra ASA-kriteriet følger da at

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB.$$

Spesielt følger da at:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{og} \quad \overline{BC} \cong \overline{DA}.$$

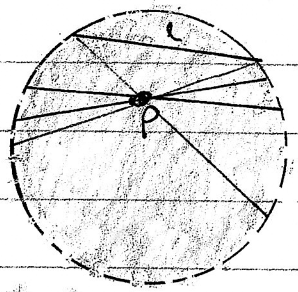
(c)



Anta at P og Q er distinkte punkter på l. Fotpunktene for normalen med på m betegnes P′ og Q′. Vi må altså bevise at $PP' = QQ'$. Siden l og m er parallelle må også vinklene $\angle P'PQ$ og $\angle Q'QP$ være rette ut fra det motsatte av alternativ-indre-vinkelteorem. Altså er $\square PQQ'P'$ et rektangel og dermed et parallellogram. Fra (b) følger da spesielt at $PP' = QQ'$.

OPPGAVE 4 (HYPERBOLSK GEOMETRI)

(a)

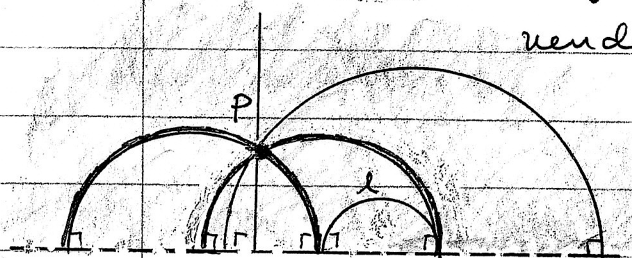


Beltrami–Klein-modellen:

$\mathbb{P} = \{(x,y);\ x^2+y^2 < 1\}$

Linjer: alle korder.

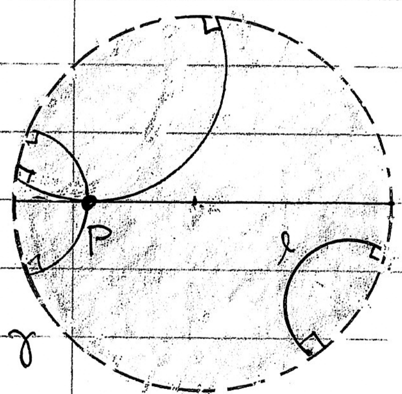
Gjennom punktet P går det uendelig mange paralleller til l.



Poincarés halvplan-modell:

$\mathbb{P} = \{(x,y);\ y > 0\}$

Linjer: halvlinjer $\perp$ x-aksen og halvsirkler med sentrum på x-aksen. Gjennom P går det uendelig mange paralleller til l



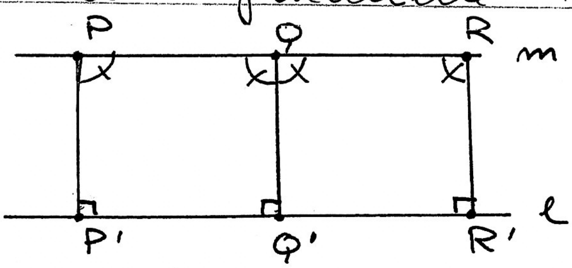
Poincarés disk-modell:

$\mathbb{P} = \{(x,y);\ x^2+y^2 < 1\}$

Linjer alle diametre samt sirkelbuer som står $\perp$ på γ: $x^2+y^2=1$

Uendelig mange linjer gjennom P er parallelle med l.

(b)



Anta at det finnes tre punkter på m som har samme avstand til l: $PP' = QQ' = RR'$ der P', Q' og R' er fot-punktene for normalene fra henholdsvis

⑥

P, Q og R ned på l. Da blir:

□PQQ'P', □QRR'Q' og □PRR'R

alle Saccheri kvadrilateraler. Ut fra oppg 2 (c), har vi da:

(▽) $\angle P'PQ \cong \angle Q'QP \cong \angle QRR' \cong \angle Q'QR$

Men $\angle Q'QP$ og $\angle Q'QR$ er samtidig supplementsvinkler. Altså er begge rette. Men det gir at alle vinklene i (▽) er rette. Spesielt blir da □PQQ'P' et rektangel. Men rektangler finnes ikke i hyperbolsk geometri. Altså kan höyst to punkt på m ha samme avstand til l.

(c) Hvis euklidsk geometri er logiske konsistent, så viser enhver modell for hyperbolsk geometri som er basert på euklidsk geometri at også hyperbolsk geometri er logiske konsistent. Altså er det umulig ut fra nöytral geometri å bevise det euklidske parallellpostulat. Dermed sier eksistensen av ovenfor omtalte modeller for hyperbolsk geometri at de nesten 2000 års bestrebelser for å bevise Euklids parallellpostulat var dömt til å mislykkes!