25/5-10

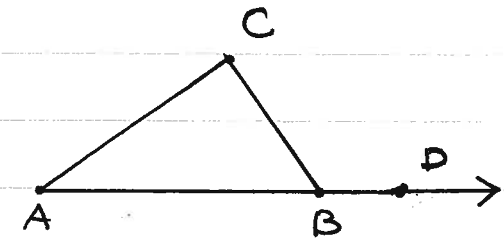
LØSNINGER:

Oppg. 1

	N	E	H
(a)	×	×	×
(b)	×	×	×
(c)		×	
(d)		×	
(e)		×	
(f)			×
(g)		×	
(h)			×

Oppg. 2

(a)



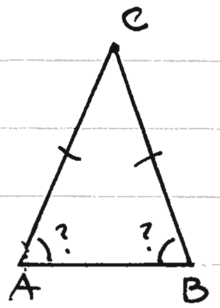
$\mu(BAC) < \mu(CBD)$

og

$\mu(ACB) < \mu(CBD)$

når $A * B * D$ som på figuren.

(b)



Vi skal bevise:

$\overline{CA} \cong \overline{CB} \Rightarrow \angle CAB \cong \angle CBA$.

Vi ser på trekantene $\triangle CAB$ og $\triangle CBA$.

Vi påstår at $\triangle CAB \cong \triangle CBA$.

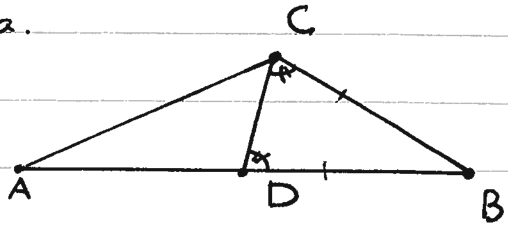
Vi har: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, $\overline{CB} \cong \overline{CA}$ (antagelsen) og at $\angle ACB \cong \angle BCA$ (ut fra def. av vinkler.) Ut fra <u>SAS-aksiomet</u> følger

$\triangle CAB \cong \triangle CBA$

Spesielt må da: $\angle CAB \cong \angle CBA$.

25/5-10

(c) Vi antar at $AB > BC$ i $\triangle ABC$.
Vi kan da (ifl. linjal-postulatet) avsette et punkt D s.a. $A * D * B$ og s.a. $BD = BC$. Ut fra (b) har vi at



$\angle CDB \cong \angle BCD$. Siden D ligger mellom A og B vil $\overrightarrow{CD}$ være en indre stråle i $\angle ACB$. Dermed vil

$$\mu(\angle ACB) > \mu(\angle DCB) = \mu(\angle CDB)$$

Siden $\angle CDB$ er ytre vinkel i $\triangle ADC$, er dermed, ut fra (a):

$$\mu(\angle CAD) = \underline{\mu(\angle CAB) < \mu(\angle ACB)}$$

(d) Det gjenstår å bevise at:

$$\mu(\angle CAB) < \mu(\angle ACB) \Rightarrow AB > BC$$

(RAA): Anta at $AB \leq BC$. Hvis $=$ gjelder, følger det fra (b) at

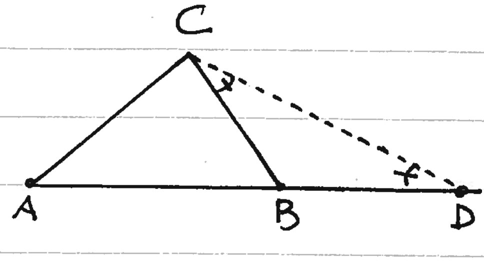
$$\mu(\angle CAB) = \mu(\angle ACB)$$

i strid med antagelsen. Hvis $AB < BC$ følger det fra (c) ovenfor at

$$\mu(\angle ACB) < \mu(\angle CAB),$$

også i strid med antagelsen.

(e) Vi avsetter et punkt D s.a. $A * B * D$ og $BD = BC$.



Da blir $\triangle CBD$ likebent og derfor blir $\angle BCD \cong \angle BDC$. Siden $\overrightarrow{CB}$ er en indre stråle i $\angle ACD$,

25/5-10

har vi at $\mu(\angle BDC) = \mu(\angle BCD) < \mu(\angle ACD)$.
Ut fra Scalene-ulikheten (punkt (d)), har vi da at $AB + BD > AC$ og videre at

$$\underline{AB + BC > AC}$$

siden $BD = BC$.

(f) Vi må se på tilfellet når A, B og C er distinkte og kolineære. Hvis $A * B * C$, har vi ut fra definisjonen at

$$AB + BC = AC$$

Hvis $A * C * B$, har vi analogt at:

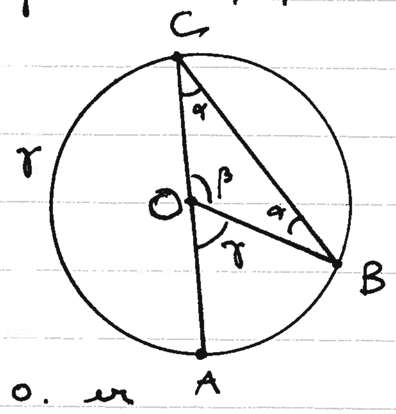
$$AC + CB = AB$$

Dette gir at $AC < AB$ som videre gir: $AC < AB + BC$ siden alle lengder er > 0.
Tilfellet $B * A * C$ behandles helt tilsvarende. Tilsammen har vi da ut fra (e):

$$AB + BC \geq AC$$

for alle distinkte tripler A, B, C.

Oppg. 3:



(a) Vi observerer først at $\angle OCB \cong \angle OBC$ ut fra oppg. 2(b). Siden vi er i euklidsk geometri, er $\sigma(\triangle OBC) = 180$. M.a.o. er

(*) $\beta = \mu(\angle COB) = 180 - 2\alpha$. Siden $\angle COB$ og $\angle AOB$ er supplementvinkler har vi:

(**) $\gamma = \mu(\angle AOB) = 180 - \beta$. Av (*) og (**)

har vi dermed:

$$\gamma = 180 - \beta = 2\alpha,$$

d.v.s.

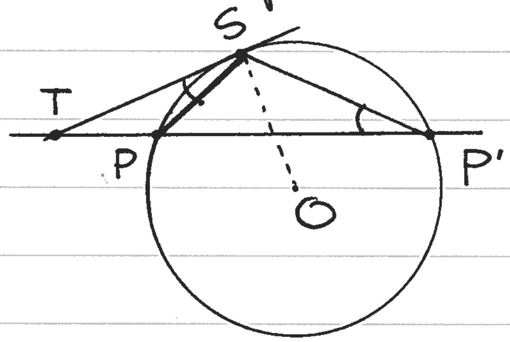
$$\mu(\angle ACB) = \tfrac{1}{2}\mu(\angle AOB).$$

(b)

To periferivinkler som spenner over samme bue er like store. På fig. 1 er dermed $\angle DAC \cong \angle DBC$.

De to vinklene $\angle DAC$ og $\angle DCT$ på fig. 2 er like store når C er berøringspunktet til tangenten til sirkelen γ gjennom punktet T.

(c)



Ut fra siste del av (b) har vi at

$\angle TSP \cong \angle TP'S$.

Videre har trekantene $\triangle TPS$ og $\triangle TSP'$ vinkelen $\angle STP$ felles. Siden vi er i euklidsk geometri er dermed:

$$\triangle TPS \sim \triangle TSP'$$

Ut fra fundamentalteoremet for formlike trekanter (som også gjelder i euklidsk geometri!) har vi da:

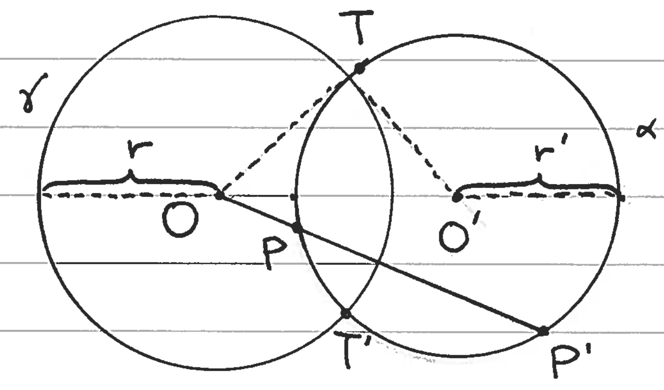
$$\frac{TP}{TS} = \frac{TS}{TP'}$$

eller:

$$(TP)(TP') = (TS)^2.$$

25/5-10

(d)



Vi antar altså at:

$$(OP)(OP') = r^2$$

Ut fra (c) har vi dessuten:

$$(OP)(OP') = (OT)^2$$

der T er et av berøringspunktene til tangentene til α gjennom O. Altså må:

$$OT = r$$

Det vil si at tangentsegmentet $\overline{OT}$ er en radius i γ, og radien $\overline{OT}$ i γ må falle langs tangenten til α i T. Altså står de to sirklene ⊥ på hverandre i T. Av symmetrigrunner er det samme tilfellet i det andre skjæringspunktet T'.

Oppg. 4:

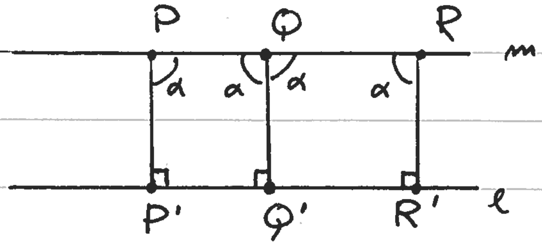
(a) En Saccheri-firkant □ABCD er en firkant der $\overline{AB}$ er grunnlinje, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ og $\angle DAB$ og $\angle CBA$ begge er rette. I nøytral geometri bevises at $\angle ADC \cong \angle BCD$ og at begge disse vinklene er $\leq 90°$. I hyperbolsk geometri vet vi da at begge disse vinklene er spisse.

Det er bevist i nøytral geometri

25/5-10

at en Saccheri-firkant er et parallellogram. Altså gjelder dette også i hyperbolsk geometri.

(b)



Anta at det finnes tre forskjellige punkt P, Q, R på m s.a.

(∇) $d(P, l) = d(Q, l) = d(R, l)$.

Siden $m \neq l$ kan høyst et punkt av de tre være s.a. $d(P, l) = 0$. Men (∇) gir i så fall at også R og Q ligger på l, m.a.o. at $m = l$ i strid med antagelsen. Altså må f.eks. P og Q ligge på samme side av l. Ut fra egenskapene med en Saccheri-firkant blir da $\overleftrightarrow{PQ} \parallel l$, og R må også ligge på samme side av l som P og Q.

Da blir $\square PP'Q'Q$, $\square PP'R'R$ og $\square QQ'R'R$ alle Saccheri-firkanter. Ut fra (b) blir da $\angle P'PQ \cong \angle Q'QP$, $\angle P'PR \cong \angle R'RP$ og $\angle Q'QR \cong \angle R'RQ$. Dette gir da:

$$\angle Q'QP \cong \angle Q'QR$$

Men samtidig er disse to siste vinkler supplementære, og dermed er begge rette. Altså er alle fire toppvinkler rette og vi har 3 rektangler. Dette er i strid med det faktum at rektangler ikke finnes i hyperbolsk geometri.

NOEN KOMMENTARER TIL BESVARELSENE:

OPPG 1: Forbausende mange krysset på (b) av slik: N ☒, E ☐, H ☐. Dette er svært avslörende! Det er jo gjennom hele kurset understreket at teorem som bevises i nöytral geometri også må være riktig i euklidsk og i hyperbolsk geometri!!
Eller er man i skolematematikken ikke klar på at: $x < 180 \Rightarrow x \leq 180$ og at $x = 180 \Rightarrow x \leq 180$??

OPPG 2: I punkt (b) var det svært få som ga det elegante beviset som står i lösningen. Dette bevis finnes på s. 88, Venema, og er gjennomgått på forelesning! Svakheten ved et bevis som ofte presenteres i en del skoleböker er omtalt på s.87, Venema.
Verst er det at noen "klarer å bevise" at $\angle CAB \cong \angle CBA$ uten å benytte at $\overline{CA} \cong \overline{CB}$!
Å benytte SSS for å bevise teoremet er ikke bra. Teoremet inngår nemlig i beviset for SSS (Oppg. 6.8, s.132). Da blir det jo det man kaller et "sirkel-argument."
(d) Nesten ingen benyttet beviset i den gitte lösning. Se Oppg. 6.10, s.132.

(NOEN KOMMENTARER... forts.)

(e) Noen ble opprbragt over at dette spörsmål var med da det på nettsiden står: "Bevis for trekantulikheten i $\mathbb{R}^2$ er ikke pensum." Men dette har jo ingenting med saken å gjöre!! Et bevis som holder for en spesielle modell for euklidsk geometri kan jo ikke benyttes som bevis i nöytral geometri! Trekantulikheten er Teorem 6.4.2, s. 103, Venema. Beviset ble gjennomgått på forelesning - og dette framgår klart av forelesningsoversikt fra 24/2 og 26/2.

(c) og (d) var jevnt over dårlig besvart, til tross for at begge punkter ble gjennomgått på forelesningene. (Se oversikt over forelesningen 24/2)

OPPG 3: Her er vel både (a) og (b) bevist i det nye pensum for videregående skole. (c) var besvart bra hos mange, mens (d) var ujevnt besvart.

OPPG 4: Ganske bra besvart.

KONKLUSJON: Strykprosenten blir ikke så avskrekkende. Men mange ville tjent flere karakterer ved å gå regelmessig på forelesninger og övinger!!
En del har tydeligvis heller ikke vært inne på kursets nettside og derfor gått glipp av viktig informasjon!!