MA 2401, VÅR 2010

LØSNINGER (forts)

Oppg. 3.11, s. 42:

TEOREM 3.6.5

For hvert punkt P finnes det minst en linje l s.a. P ikke ligger på l.

BEVIS:

I følge Insidensaksiom 3 finnes det tre punkter A, B, C som ikke er kolineære. Hvis P er et av disse, f.eks. P = A, så ligger P ikke på linjen $l = \overleftrightarrow{BC}$.
Hvis P er forskjellig fra A, B, C kan høyst en av linjene $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{BC}$ inneholde P. Hvis nemlig $P \in \overleftrightarrow{AB}$ og $P \in \overleftrightarrow{AC}$ må $P = A$ siden $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{AC}$ er forskjellige og bare har punktet A felles.* Analogt får vi P = B eller P = C i de øvrige tilfellene når to av de tre linjene $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ inneholder P. I alle tilfellene får vi altså selvmotsigelse. I begge situasjoner finnes det altså en linje l som ikke inneholder P.

* Her benyttes Teorem 3.6.1 !

ØVING 2,
MA2401, V2010, Lösn. forts.

Oppg. 3.12, s.42:

TEOREM 3.6.6

Det eksisterer tre distinkte linjer s.a. ikke noe punkt ligger på alle tre linjer.

BEVIS:

Det finnes i følge Insidensaksiom 3 tre punkter A, B, C som ikke er kolineære. Dette gir at linjene $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ er distinkte (Hvis f.eks. $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BC}$, må $C \in \overleftrightarrow{AB}$ i strid med antagelsen.) Ut fra Teorem 3.6.1 er A det eneste punkt som er felles for $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{AC}$, mens B er det eneste punkt som er felles for $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{BC}$. Et punkt P som var felles for alle tre linjer måtte være lik både A og B, i strid med at A, B, C er distinkte punkter.

Oppg. 3.13, s. 42:

TEOREM 3.6.7

Hvis P er et punkt så finnes det punkter Q og R s.a. P, Q og R ikke er kolineære.

BEVIS:

Ut fra Teorem 3.6.5 finnes det en

linje l s.a. P ikke ligger på l. Ut fra Insidensaksiom 2 finnes det to distinkte punkter Q og R på l. Da kan ikke de tre punktene P, Q og R være kolineære.

<u>Oppg. 3.14, s 42:</u>

<u>TEOREM 3.6.8</u>

Hvis P og Q er to punkter der $P \neq Q$, da eksisterer det et punkt R s.a. P, Q og R ikke er kolineære.

<u>BEVIS:</u>

Linjen $l = \overleftrightarrow{PQ}$ har et ytre punkt, d.v.s. et punkt $R \notin l$, ut fra Teorem 3.6.2. Da er P, Q og R ikke kolineære.

Oppg. 5.5, s91

Vi antar at $f: l \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon for l. Dette betyr:

$f: l \to \mathbb{R}$ er en bijeksjon (1-1-tydig korrespondanse)

For $P, Q \in l$ skal dessuten:

$$|f(P) - f(Q)| = PQ$$

Husk at avstanden PQ er gitt som et ikke-negativt tall - uten at det er spesifisert hvordan dette tallet er gitt!!

Øving 3, LØSN. forts.

(a) Vi skal bevise at når f er en koordinatfunksjon, så er også $-f$ gitt ved: $(-f)(P) = -f(P)$ (som vanlig i det reelle)

(i) $-f$ er injektiv (1-1):

Antar at $-f(P) = -f(Q)$. Da er $f(P) = f(Q)$, og siden f er injektiv, må $P = Q$.

(ii) $-f$ er surjektiv (onto):

La r være et vilkårlig gitt reelt tall. Siden f er surjektiv finnes det et punkt P på l s.a. $f(P) = -r$. Men da vil $-f(P) = -(-r) = r$. Altså er hvert punkt på $\mathbb{R}$ et billedpunkt ved $-f$.

(iii) $|-f(P) - (-f(Q))| = |f(P) - f(Q)| = PQ$ siden f er antatt å være en koordinatfunksjon.

(b) Vi definerer $g(P) = f(P) + c$, der c er et fastholdt reelt tall. Vi skal vise at g er en koordinatfunksjon siden f er en koordinatfunksjon.

(i) g er injektiv:

Anta at $g(P) = g(Q)$, d.v.s. at

$f(P) + c = f(Q) + c$ som gir $f(P) = f(Q)$

Siden f er antatt å være injektiv, gir dette at $\underline{P = Q}$

(ii) La $r \in \mathbb{R}$ vilkårlig valgt. Siden f er surjektiv finnes det et $P \in l$ s.a.

$f(P) = r - c$.

Dette gir $g(P) = f(P) + c = r - c + c = \underline{r}$.

(c) Vi holder fast på utgangspunktet at $f: l \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon. Vi antar så at $h: l \to \mathbb{R}$ er en vilkårlig koordinatfunksjon. Vi påstår da at vi må ha:

$h(P) = f(P) + c$; c reell konstant
eller $h(P) = -f(P) + c$; c —"— —"— .

Anta at $f(P_0) = 0$. Da finnes det et $c \in \mathbb{R}$ s.a. $h(P_0) = c$. La da så P være et vilkårlig punkt på l. Vi har da:

$PP_0 = |f(P_0) - f(P)| = |f(P)| = |h(P) - h(P_0)|$
$= |h(P) - c|$. Altså har vi at

(*) $f(P) = h(P) - c$; dvs. $h(P) = f(P) + c$
eller: $f(P) = -h(P) + c$; dvs $h(P) = -f(P) + c$.

La $Q \in l$, $Q \neq P$. Vi får da helt analogt at $f(Q) = h(Q) - c$ eller at
(**) $f(Q) = -h(Q) + c$. Vi har videre:
$|f(P) - f(Q)| = PQ = |h(P) - h(Q)|$ siden h er en koordinatfunksjon. Hvis (*) og (**) holder får vi da:
$|h(P) - h(Q)| = |f(P) + c + f(Q) - c|$
$= |f(P) + f(Q)| = |f(P) - f(Q)|$ for alle par $P \neq Q$. Dette gir $f(P) = 0$ eller $f(Q) = 0$ for alle P og Q. Dette er umulig siden f er injektiv! Altså må ha for $P \neq Q$: $h(P) = f(P) + c$. Dette betyr at:

$$h = f + c.$$

Helt analogt beviser vi at dersom

$$f(P) = -h(P) + c,$$

så må

$$h = -f + c.$$

MA 2401, GEOMETRI
ØVING 4, 6/2-10
Løsninger:

6 Oppg. 5.8, s. 91:

Vi får oppgitt at $f: l \to \mathbb{R}$ er en funksjon som oppfyller betingelsen

(*) $\quad PQ = |f(P) - f(Q)|$

for alle $P, Q \in l$. Vi skal bevise at f er en koordinatfunksjon for linjen l. (Se def. 5.4.11, s. 61)

Vi må altså bevise at f også er en bijeksjon (1-1-korrespondanse)

(i) f er injektiv (1-1-tydig):
Anta $f(P) = f(Q)$. Da gir (*) at $PQ = 0$. I følge Teorem 5.4.6 er dette tilfellet bare hvis $P = Q$.

(ii) f er surjektiv (på $\mathbb{R}$):
Vi må vise at for vilkårlig $x_0 \in \mathbb{R}$ finnes det et $P \in l$ s.a.

$$f(P) = x_0$$

La $g: l \to \mathbb{R}$ være en koordinatfunksjon for l. (Eksistensen av en slik g følger av Aksiom 5.4.1, s. 58)

Det finnes da et punkt $P_0 \in l$ s.a. $\quad g(P_0) = 0$.

La $f(P_0) = c$. Det finnes da punkter $P_1 \in l$ s.a. $g(P_1) = x_0 - c$ og $P_2 \in l$ s.a. $g(P_2) = c - x_0$. $P_1 \neq P_2$ dersom $x_0 \neq c$.

MA2401, ØVING 4, V2010, Lösning: ②

Vi har da:

$P_1P_0 = |f(P_1)-f(P_0)| = |f(P_1)-c|$

$P_1P_0 = |g(P_1)-g(P_0)| = |g(P_1)| = |x_0-c|$

Altså har vi:

$f(P_1)-c = x_0-c$ eller $f(P_1)-c = c-x_0$

Videre har vi:

$P_2P_0 = |f(P_2)-f(P_0)| = |f(P_2)-c|$

$P_2P_0 = |g(P_2)-g(P_0)| = |g(P_2)| = |c-x_0|$

Altså har vi:

$f(P_2)-c = x_0-c$ eller $f(P_2)-c = c-x_0$

Siden f er injektiv, kan vi ikke ha:

$f(P_1) = 2c-x_0 = f(P_2)$. Vi må derfor ha enten:

$f(P_1)-c = x_0-c$, d.v.s. $f(P_1) = x_0$,

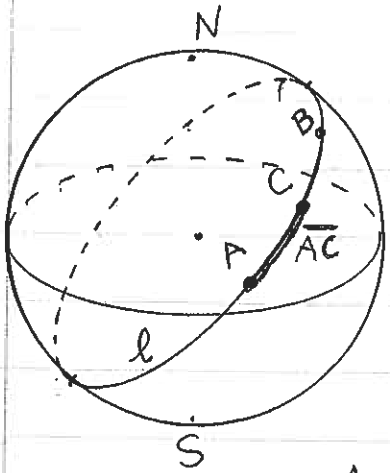
eller $f(P_2)-c = x_0-c$, d.v.s. $f(P_2) = x_0$

Dersom $\underline{x_0 = c}$, vil $f(P_0) = c = x_0$.

Altså er f surjektiv.

Oppgave 5.25, s.92:

Vi studerer her mellomliggenhet på kulen. Husk at avstanden



$D(A,B)$ er definert som lengden av den korteste av de to buene av storsirkelen som går gjennom A og B på kuleoverflaten. Når f.eks. $A = N$ (nordpolen) og $B = S$ (sydpolen) blir de to buene like lange og har lengde π siden kulens radius er lik 1. I så fall settes:

$$D(N,S) = \pi.$$

Som vanlig defineres mellomliggenhet

$$A * B * C$$

ved at: $D(A,B) + D(B,C) = D(A,C)$.

Segment og stråle defineres ut fra mellomliggenhet som vanlig.

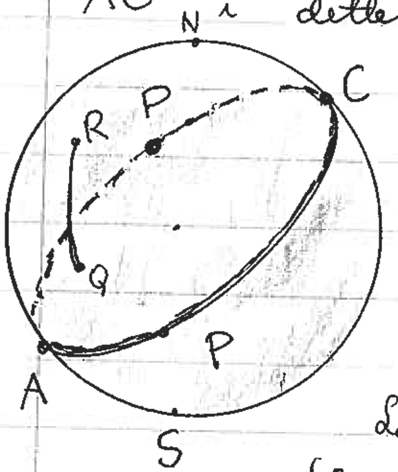
De to halvplan H_1 og H_2 i forhold til l er de to halvkuler som bestemmes av storsirkelen l.

(a) Vi antar at A og C ikke er antipodale, skal segmentet $\overline{AC}$ skisseres på kulen. Dette blir alle punkter på den korte buen av storsirkelen da man for alle P på denne buen opplagt har:

$$AP + PC = AC$$

(Andre punkt på storsirkelen oppfyller ikke denne likhet.)

(b) Vi antar så at A og C er antipodale og skal bestemme segmentet $\overline{AC}$ i dette tilfellet. I dette tilfellet ser vi at alle punkter på storsirkelen ℓ gjennom A og C oppfyller betingelsen

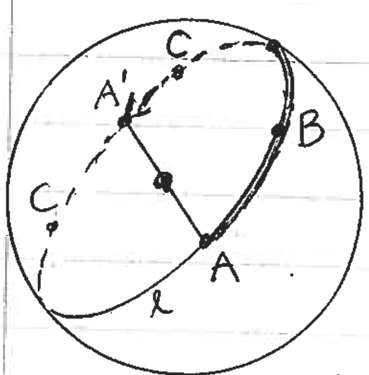


$$AP + PC = AC,$$

altså $A * P * C$ for alle $P \in \ell$. Lar vi ℓ gjennomløpe alle linjer ℓ, får vi at $\overline{AC} = S^2 \setminus \{A, C\}$.

(c) De to halvkulene som dannes av $S^2 \setminus \ell$ oppfyller plan-separasjonsaksiomet (Aksiom 5.5.2, s. 64) fordi $S^2 \setminus \ell = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, H_1 og H_2 er konvekse. (Husk at (korteste) buer av storsirkler utgjør segmentene når to punkter ikke er antipodale!) Når $P_1 \in H_1$ og $P_2 \in H_2$ vil segmentet skjære ℓ.

(d) Hvis A og B ikke er antipodale skal vi bestemme alle punkt C som er s.a. $A * B * C$. Vi ser at $AB + BC = AC$ for alle C som ligger på ℓ mellom B og A', der A' er antipodalt til A.

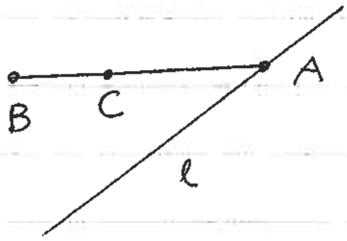


Men for C som ligger på den andre halvsirkel av ℓ har vi $CA + AB = CB$; altså $C * A * B$.

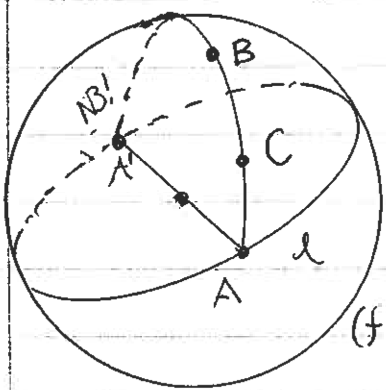
Strålen $\overrightarrow{AB}$ i dette tilfellet er dermed halvsirkelen $\overline{AA'}$.

(e) <u>TEOREM 5.7.6:</u>

Hvis l er en linje, $A \in l$ og $B \notin l$, så vil ethvert punkt C som er s.a. $A * C * B$ ligge på samme side av l som B.



Holder dette i vårt eksempel?



Vi ser at B og C må ligge på samme halvkule i forhold til l.

(f) <u>KOROLLAR 5.7.7:</u>

Anta at l er en linje, $A \in l$ og $B \notin l$. Hvis $C \in \overrightarrow{AB}$ og $C \neq A$, så ligger B og C på samme side av l.

Siden strålen $\overrightarrow{AB}$ ligger på samme halvkule som B i forhold til l, må C også høre til denne halvkulen. Men det diametralt motsatte punkt til A, A', ligger også på strålen, men samtidig på l. Altså Teor. 5.7.6 holder <u>ikke</u> her!