MA 2401, GEOMETRI
ØVING 1, 14/1-08
Lösninger:

Oppg. 1.3, s. 13:

Tenk på det store kvadratet som er boks der det er plassert fire kongruente trekanter med katter a og b og hypotenus lik c.
Det skraverte området er da det som er synlig av bunnen av boksen.
I utgangssituasjonen antar vi at trekantene er plassert som på figuren til venstre. Så skyves trekantene slik at vi får figuren til höyre.
Det er da opplagt at det som nå er synlig av bunnen av boksen har samme areal som det som var synlig i utgangspunktet.
Siden vinklene ved hjörnene til det skraverte området i 1. situasjon er rette*, blir arealet av dette området: c^2
I situasjonen til höyre er det synlige areal av bunnen lik
$$a^2 + b^2.$$
Altså må: $c^2 = a^2 + b^2$.

*Hvorfor??

MA 2401, ØVING 1, LØSNING:

Oppg. 1.4, s. 13:

(a) Vi antar at u, v er (hele) naturlige tall uten felles primfaktorer, $(u,v)=1$, og at $u>v$. Vi definerer:

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2$$

Vi har da at a, b, c er hele tall > 0 og videre:

NB! I det generelle tilfellet er antagelsen $(u,v)=1$ irrelevant

$$a^2 + b^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 =$$
$$u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2+v^2)^2 = c^2$$

Altså er (a,b,c) et Pytagoreisk trippel.

(b) Antar vi at u og v begge er oddetall, blir

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2u \cdot v, \quad c = u^2 + v^2$$

like tall.

(c) Vi sier at (a,b,c) er et primitivt pytagoreisk trippel hvis $a^2 + b^2 = c^2$ og det ikke finnes noe primtall p som går opp i såvel a som b og c.

Vi skal bevise følgende:

(a,b,c) er et primitivt pytagoreisk trippel dersom $(u,v)=1$ og av u og v er det ene et oddetall og det andre et liketall.

Da er b et liketall: $b = 2uv$, mens både $a = u^2 - v^2$ og $c = u^2 + v^2$ er odde.

MA 2401, ØVING 1, LØSNING:

Altså er ikke 2 en divisor i a, b og c. Anta at p er en primfaktor som er felles for a, b, c, $p \neq 2$. Siden

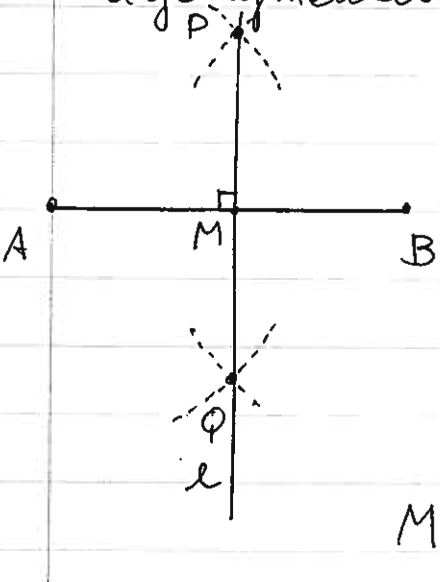
$$b = 2u \cdot v,$$

må p være divisor i u men ikke i v eller omvendt. Men siden:

$a = u^2 - v^2$ ikke er delbar med p kan ikke p gå opp i alle tre tallene a, b, c. Altså er (a, b, c) et primitivt pytagoreisk trippel.

<u>Oppg. 1.6, s. 14:</u>

(a) Vi skal konstruere midtnormalen på linjesegmentet $\overline{AB}$ med passer og linjal.



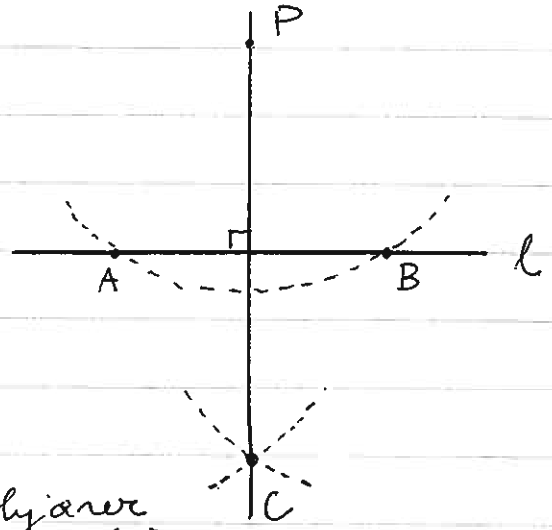
<u>Forklaring:</u> Vi slår sirkelbuer om A og B med samme radius. Skjæringspunktene P og Q forbindes med en linje. Denne linje må være $\perp \overline{AB}$ og skjæringspunktet M blir midtpunktet.

<u>KOMMENTAR:</u>

Hvorfor linjen $\overleftrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på $\overline{AB}$ og hvorfor M blir midtpunktet på $\overline{AB}$ kommer vi tilbake til senere i kurset!

MA 2401, ØVING 1, LØSNING:

(b) Vi skal nedfelle normalen fra punktet P til linjen l

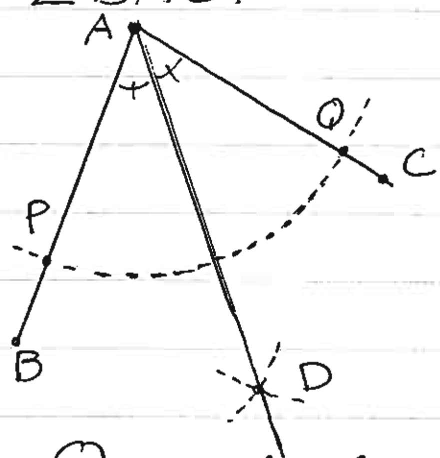


Forklaring: Vi slår en sirkelbue med sentrum i P som skjærer l i to punkter A og B. En sirkelbue om A og en sirkelbue om B med samme radius skjærer hverandre i C. Linjen $\overleftrightarrow{PC}$ blir da normal på l og går gjennom P.

KOMMENTAR:

At $\overleftrightarrow{PC} \perp l$ ved denne konstruksjon skal vi også komme tilbake til senere.

(c) Vi skal konstruere halveringslinjen til en gitt vinkel $\angle BAC$.



Forklaring:

Vi slår en sirkelbue med sentrum i A som skjærer vinkelens ben i henholdsvis P og Q. Deretter slår man sirkelbuer om P og Q med samme radius med skjæringspunktet D. Linjen $\overleftrightarrow{AD}$ er da vinkelens halveringslinje.

KOMMENTAR:

Også i dette tilfellet kommer begrunnelsen senere!

MA2401, ØVING 1, LØSNING:

Oppg. 1.7, s.14: (s.5 i Venema)

(a) Postulat II er egentlig nokså uklart. Antagelig tenkte Euklid på linje i tradisjonell forstand og så derfor ingen grunn til å forutsette at hver linje hadde minst to punkter. Svaret må bli at påstanden her ikke kan bevises ut fra Euklids postulater og "common notions".

(b) Heller ikke dette kan bevises ut fra Euklids utgangspunkt.

(c) At det finnes minst en linje gjennom to punkter $A \neq B$ er innholdet av Postulat I hos Euklid. Entydigheten av en slik linje følger derimot ikke fra Euklids utgangspunkt.

Oppgave 1.10, s. 14-16:

Det første tilfellet der $\ell \perp \overline{BC}$ er helt i orden. At vi har

$$\triangle ABG \cong \triangle ACG$$

A vinkel
S side

følger av det såkalte ASA-teoremet, siden $\measuredangle BGA$ og $\measuredangle CGA$ er rette, siden GA er felles for de to trekantene og siden $\measuredangle BAG \cong \measuredangle CAG$ p.g.a. halveringen. Altså er $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ i dette tilfellet.

MA 2401, ØVING 1, LØSNING:

(Den første trekanten på fig. 1.8 mangler midtnormalen. Det må bevises at $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.)

I tilfellet der M = D er faktisk bevist korrekt. I de to øvrige tilfellen vil E ligge mellom AB og F utenfor C (se vedlagt figur), omvendt, slik at:

$$AB = AE + EB \quad \text{og} \quad AC = AF - FC$$

Derfor holder ikke argumentet som baserer seg på at begge ligger enten på "innsiden" av sidene AB og AC – eller begge punktene E og F ligger på "utsiden" av disse sidene. (Vi kan slutte dette fordi vi i utgangspunktet hadde en vilkårlig trekant som ikke trenger å være likebenet – og alle trinn i argumentet som er gjennomført utenom dette siste er korrekte!)

Oppg. 2.7, s. 30:

Fanos geometri er illustrert på s. 22. Vi ser straks at det ikke finnes parallelle linjer i det hele tatt. Altså oppfylles det elliptiske parallell-postulat.

Oppg. 2.10, s. 30:

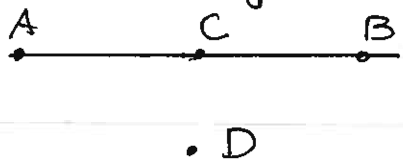
Vi søker en endelig modell for

MA 2401, ØVING 1, LØSNING:

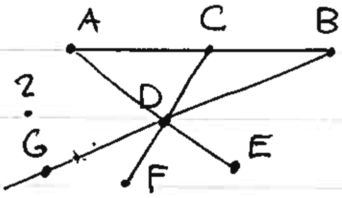
for insidens-geometri som i tillegg oppfyller kravet: Hver linje inneholder nöyaktig tre punkter. Vi ønsker å avgjöre hva som er minimum antall punkter i en slik geometri. Vi må ha minst 3 punkter (Ins.aks. 3) Vi må fölgelig ha minst <u>en</u> linje l som inneholder tre punkter A, B, C.

(Insidens aksiom 1)

Insidens-aksiom 3 krever at det skal finnes et punkt D som ikke ligger på denne linje.



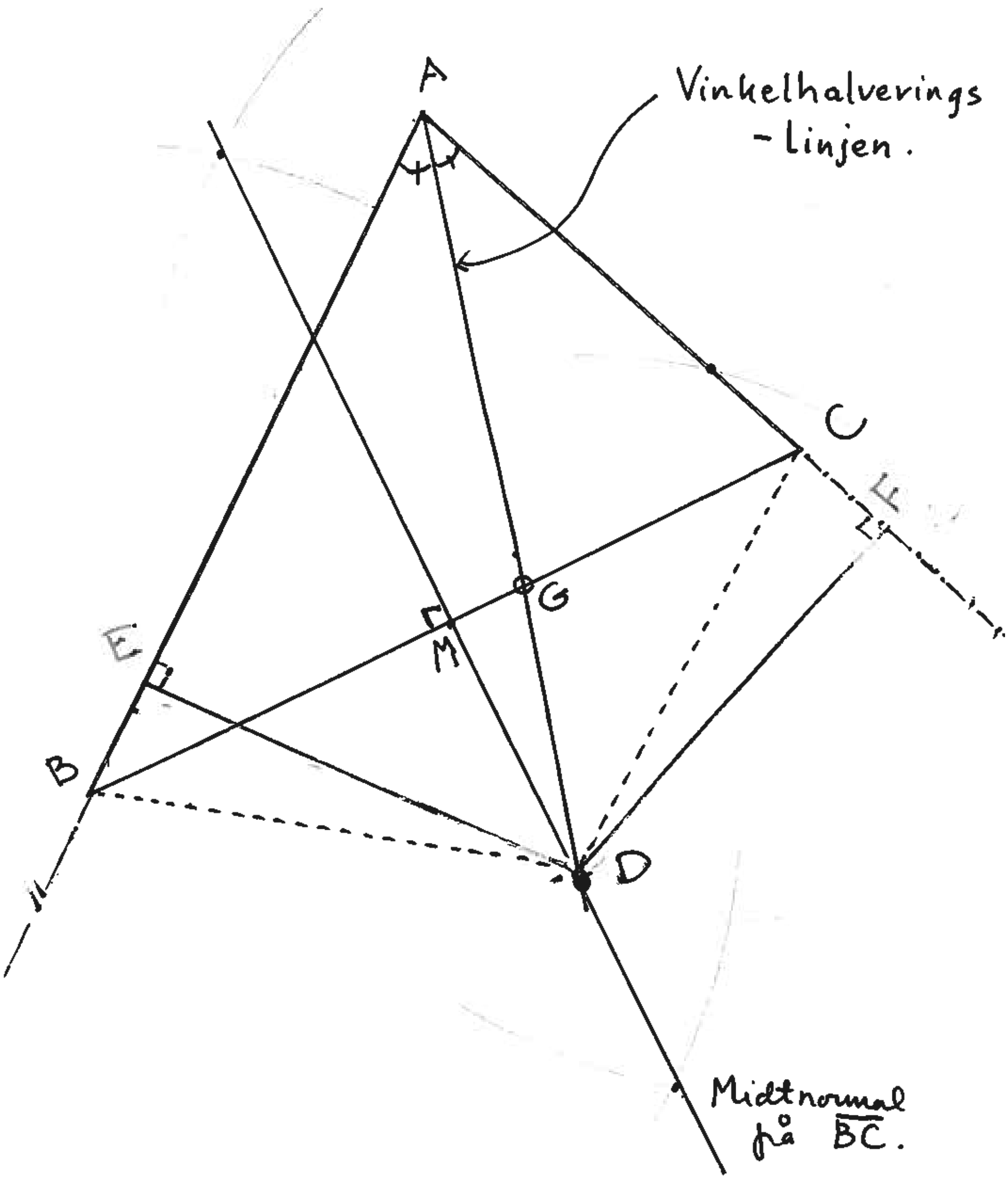
Men insidens-aksiom 1 krever at det går en linje gjennom A og D. Denne linje må inneholde tre punkter. Men det tredje punktet kan da ikke være C eller B ut fra entydigheten i insidens-aksiom 1. Altså må det finnes et 5. punkt E.



C, D må likeledes inneholdes i en linje som ikke inneholder A, B eller E. Altså må det finnes et punkt F <u>o.s.v.</u>, tilsammen minst 7 punkter. Fano's geometri er en modell bestående av 7 punkter!

OPPG. 1.10, s. 14-16:

Studer nedenstående figur nøye!
Den er konstruert relativt nøyaktig v.h.a.
passer og linjal.



HVA ER GALT PÅ FIGURENE I BOKEN?