MA2401, GEOMETRI

ØVING 7, 1/3 - 2/3 - 10

Lösninger:

Oppgave 6.3, s. 132:

Vi minner om

TEOREM 6.2.3:

For hver linje ℓ og hvert punkt $P \notin \ell$ finnes det eksakt en linje m s.a. P ligger på m og $m \perp \ell$.

(Man sier gjerne at man kan nedfelle en entydig bestemt normal (perpendikulær) fra punktet P ned på linjen ℓ.)

Vi skal her bevise följende "motpart" til dette teorem:

TEOREM:

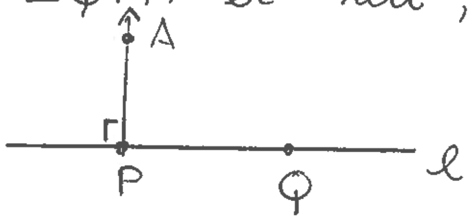
For hver linje ℓ og for hvert punkt $P \in \ell$ finnes det eksakt en linje m s.a. P ligger på m og $m \perp \ell$.

(Man sier gjerne at man kan oppreise en entydig bestemt normal til ℓ gjennom P.)

BEVIS:

Linjen ℓ inneholder et punkt $Q \neq P$ (*), s.a. $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$. Ut fra Aksiom 5.6.2, (3), finnes det på den ene

((*) direkte fölge av Aksiom 5.4.1, s. 58) siden av l et punkt A s.a. $\angle QPA$ er rett; d.v.s. $\mu(\angle QPA) = 90$

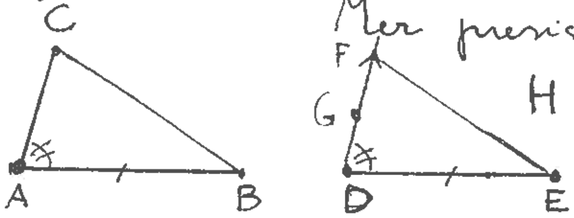


Altså går $\overleftrightarrow{PA}$ gjennom P og $\overleftrightarrow{PA} \perp l$.

Entydigheten følger av entydigheten av strålen $\overrightarrow{PA}$ og av det faktum at den motsatte stråle også er entydig bestemt og faller langs linjen $\overleftrightarrow{PA}$. (Se f.eks. oppg. 5.32, s.93)

Oppgave 6.4, s. 132:

Vi skal bevise at det er mulig å konstruere en trekant med gitt grunnlinje kongruent med en gitt trekant med ~~samme~~ kongruent grunnlinje.



Mer presist: TEOREM 6.2.4: $\triangle ABC$ er gitt og $DE = AB$, og la H være et av halvplanene bestemt av $\overleftrightarrow{DE}$. Da finnes det et entydig bestemt punkt $F \in H$ s.a.

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC.$$

BEVIS:

La $G \in H$ være valgt s.a. $\overrightarrow{DG}$ danner en vinkel med $\overrightarrow{DE}$ s.a.

$$\angle EDG \cong \angle BAC$$

(Aksiom 5.6.2 (3).) Deretter avsettes

(ØVING 7, 2010, Løsn.)

linjesegmentet $\overline{DF}$ langs $\overrightarrow{DG}$ s.a. $DF = AC$. (Vi viser til Aksiom 5.4.1, s. 58.) Da følger det av SAS at

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC.$$

Når $\overline{DE}$ er gitt er F entydig bestemt. Vinkelen $\angle EDF$ er entydig bestemt fordi en stråle s.a. $\angle EDF \cong \angle EDF'$ gir at $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DF'}$ ut fra entydigheten i Aksiom 5.6.2 (3). Analogt er $\overline{DF} \cong \overline{DF'}$, og derfor må $F = F'$ p.g.a. entydigheten.

Oppgave 6.5, s 132:

Vi minner om beviset for Teorem 6.3.2. Et viktig trinn (som Euklid oversa) er å bevise at punktet F er et indre punkt i vinkelen $\angle DCA$ (Figur 6.4, s. 99). Altså må man bevise at F er et indre punkt i denne vinkelen.

PÅSTAND:

Ved den tilsvarende konstruksjon i kule-geometrien skal vi vise at F blir et indre punkt i $\angle ACD$ hvis og bare hvis

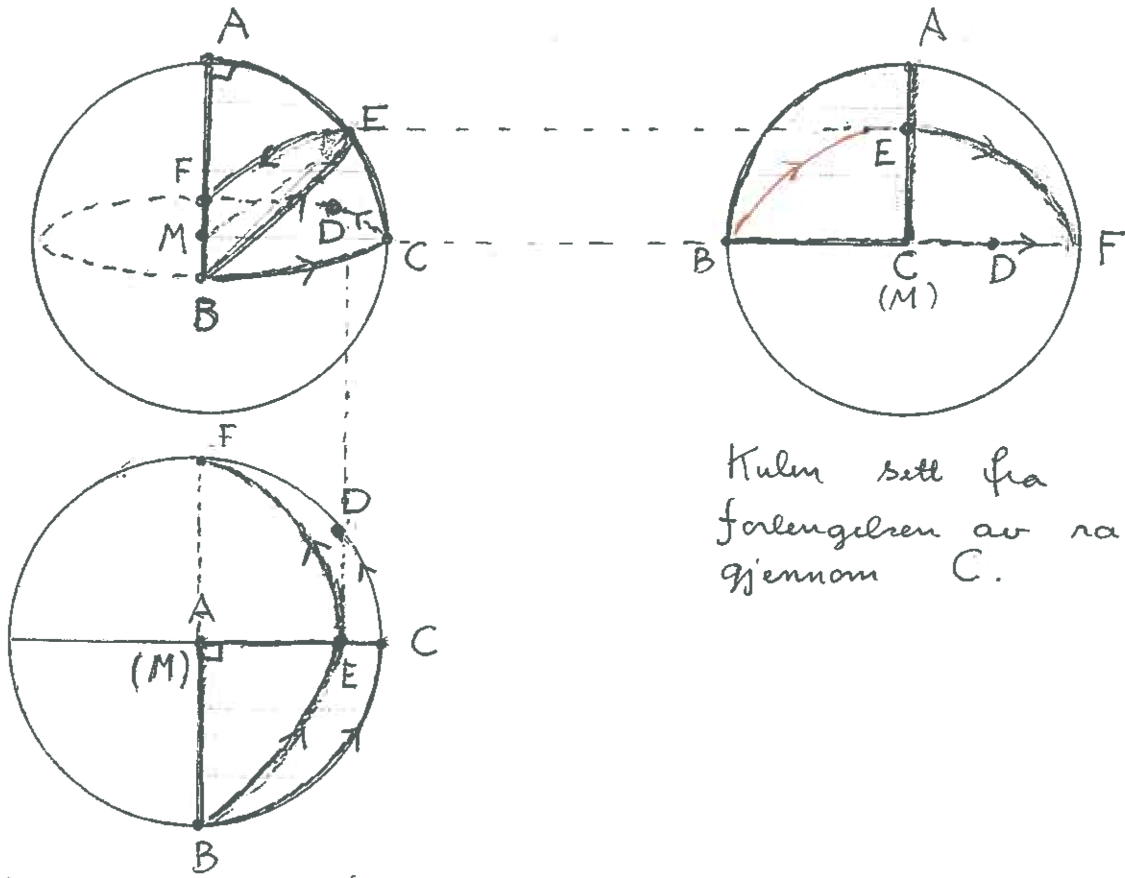
$$\mu(\angle BAC) < 90.$$

På figur 6.5, s 100, er $\angle BAC$ angitt på toppen (nordpolen) av sfæren.

(ØVING 7, 2010, Løsn.)

Bare hvis: Vi ser på to tilfeller.

(i) $\mu(\angle BAC) = 90$. Det framgår av figuren at strålen $\overrightarrow{BE}$ der E er midtpunktet på $\overline{AC}$ treffer strålen $\overrightarrow{BC}$ i punktet F. Altså er F ikke noe indre punkt i $\angle ACD$.



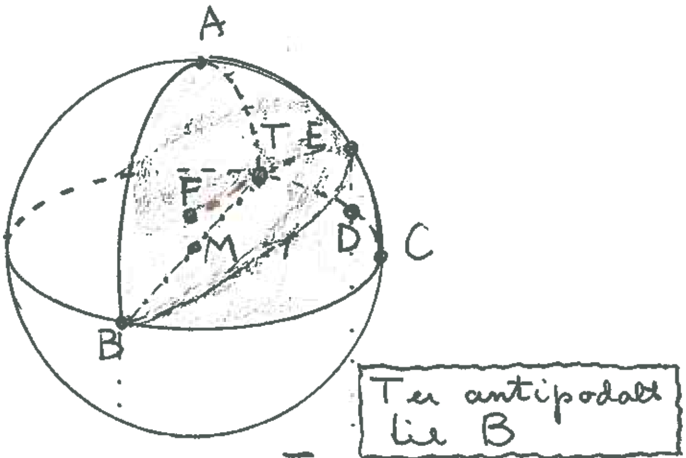
Kulen sett fra forlengelsen av radius gjennom C.

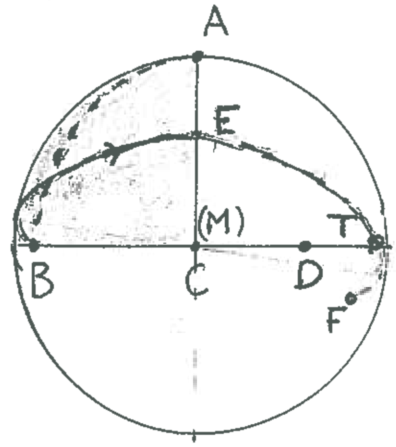
Kulen sett ovenfra

(ii) $\mu(\angle BAC) > 90$. Det framgår av figuren at strålen $\overrightarrow{BE}$ treffer $\overrightarrow{BD}$ i et punkt på "ekvator", mens F ligger på den sørlige halvkule fordi vi skal ha $BE = EF$. Altså

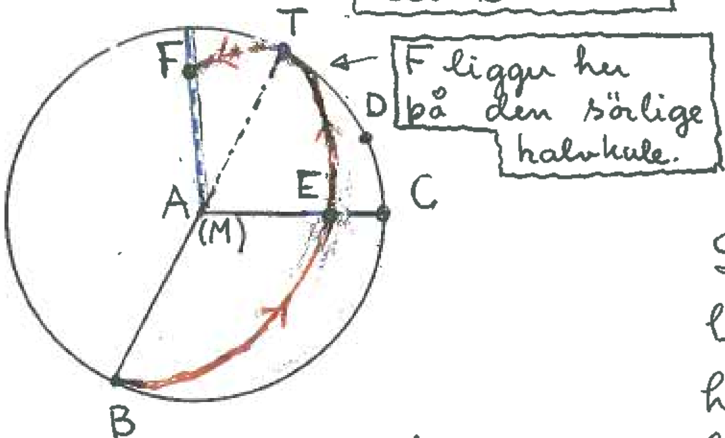
(ØVING 7, Löm. 2010.)

kan ikke F være indre punkt i ∠CBA





Kulen sett fra C mot midtpunktet M



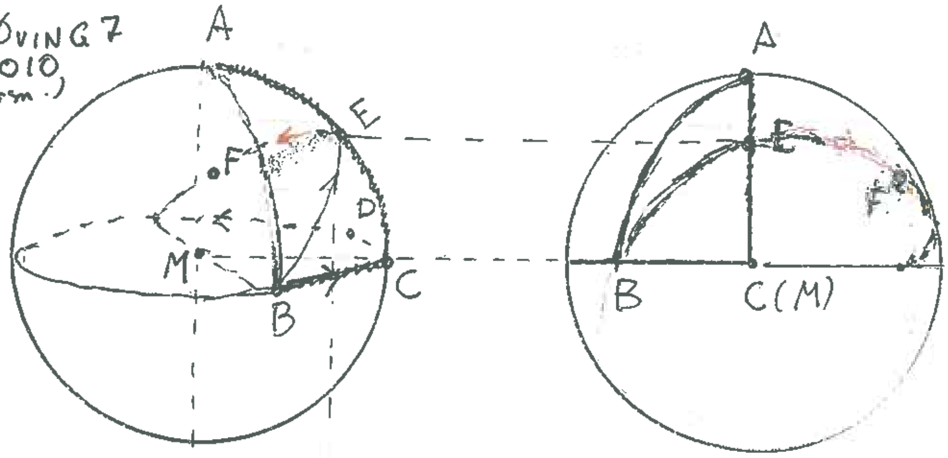
Kulen sett ovenfra. (Fra et punkt over nordpolen A inn mot sentrum i kulen)

Siden lengden av buen fra E til F skal ha samme lengde som buen fra B til E vil siste del av stor-sirkelbuen gjennom B og E fram til F ligge på den sörlige halvkule. Vi ser da at $\overrightarrow{BE}$ skjærer ekvator i $T \in \overrightarrow{BC}$. Altså er F ikke indre punkt i ∠DCA.

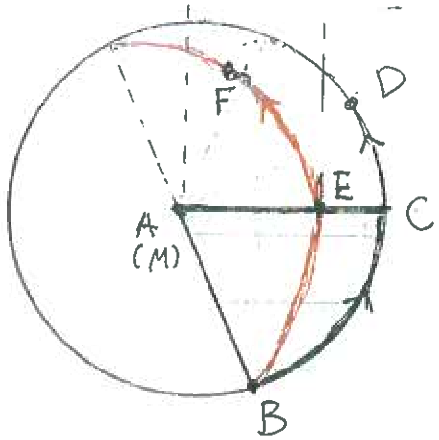
Vi ser derfor at beviset for YVT (ytre-vinkel-teoremet) ikke kan gjennomföres i denne situasjon når $\mu(BAC) \geq 90$

(ii) Hvis: Vi kan her ta utgangs-punkt i figur 6.5, s. 100, i boken, der $\mu(\angle BAC) < 90$.

(ØVING 7 2010, Løsn.)



Kulen sett fra forlengelsen av radius gjennom C



Kulen sett ovenfra.

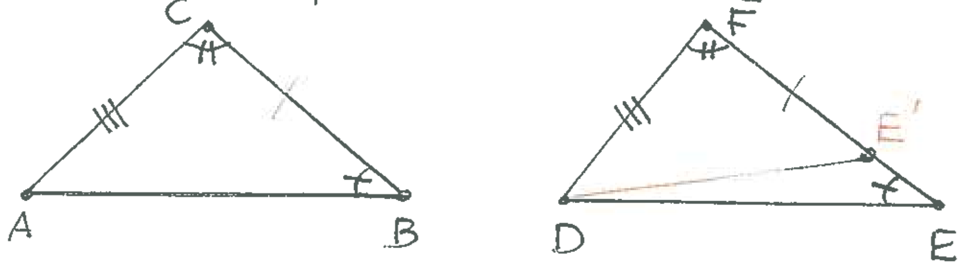
Igjen observerer vi at linjen MB ligger i planet som bestemmer $\overrightarrow{BA}$ på kuleflaten.

Siden BE = EF vil da F ligge på øvre halvkule og det innses av figuren at F blir et indre punkt i $\angle DCA$.

Oppgave 6.6, s. 132:

TEOREM 6.3.4 (AAS):

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er s.a. $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ og $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



(ØVING 7, 2010, Løsn.)

Vi kan UTAG (uten tap av generalitet) anta at $FE > CB$. Vi avsetter da et segment FE' langs $\overrightarrow{FE}$. Da vil $F * E' * E$. SAS gir da at

$$\triangle ACB \cong \triangle DFE'$$

Dette gir at

$$\angle ABC \cong \angle DE'F$$

Vi har dessuten

$$\angle DEF \cong \angle ABC$$

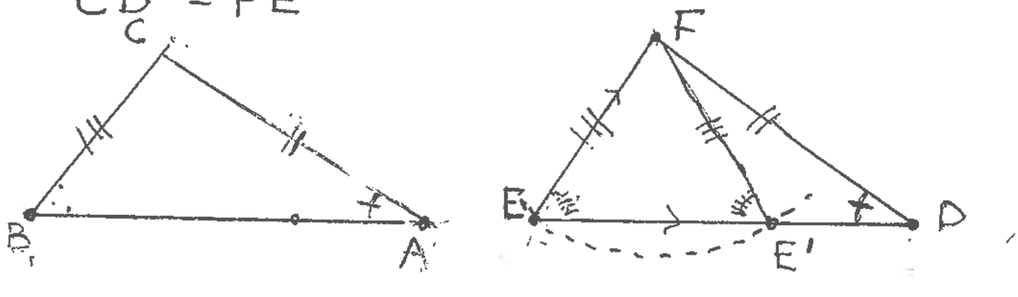
og dermed:

$$\angle DE'F \cong \angle DEF$$

Men $\angle DE'F$ er ytre vinkel i $\triangle DEE'$ som har en motstående indre vinkel $\angle DEE' \cong \angle DEF$. Dette er i strid med ytre-vinkel-teoremet. Følgelig må $CB = FE$ og påstanden følger ved SAS.

<u>Oppgave 6.9, s. 132:</u>

Vi antar at $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er s.a. $\angle BAC \cong \angle EDF$, $AC = DF$ og $CB = FE$



Vi kan si at vi viser at ASS ikke gir kongruens (Figur 6.7 s. 101 viser at det ikke er noe ASS-teorem.)

(ØVING 7, 2010, Lörn.)

Vi skal bevise at de to alternativer gir enten $\angle ABC \cong \angle DEF$ (og dermed kongruens mellom trekantene ut fra AAS (Teorem 6.3.4, s. 101), eller at $\angle ABC$ og $\angle DEF$ er supplementære.

Av figuren ⊛ ser vi at $\triangle DEF$ svarer til det første alternativet, mens $\triangle DE'F$ er s.a. $FE = FE'$. Dermed har vi fra velkjent teorem at

$$\angle FEE' \cong \angle FE'E.$$

Siden $\angle DE'F$ og $\angle EE'F$ er supplementære vinkler, blir $\angle DE'F$ supplementær til $\angle E'EF$.

⊛ Dette punktet er noe tvilsomt. Hvordan vet vi at sirkelen sentrert i F skjærer $\overleftrightarrow{ED}$ i akkurat to punkter?

MA 2401, GEOMETRI

ØVING 8, 8/3 og 9/3 - 2010

LØSNINGER:

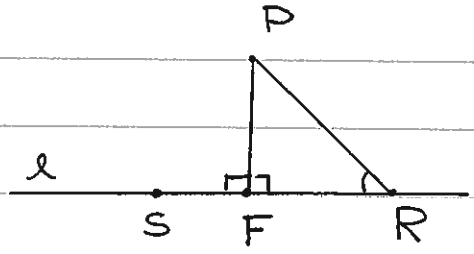
Oppgave 6.14, s. 132:

Vi skal bevise:

TEOREM 6.4.4; s. 105:

Hvis l er en linje og P et punkt s.a. $P \notin l$ og F er fotpunktet for normalen fra P på l, så vil $PF < PR$ for ethvert punkt P på l s.a. $R \neq P$.

BEVIS:



Vi observerer først at $\angle PRF < \underset{YVT}{\angle PFS}$ ut fra ytre-vinkel-teoremet. Altså er $\angle RFP < \angle PFR$. Ut fra Scalene-teoremet (Teorem 6.4.1) følger da dermed at $PF < PR$.

Oppgave 6.17, s. 132:

Vi skal bevise:

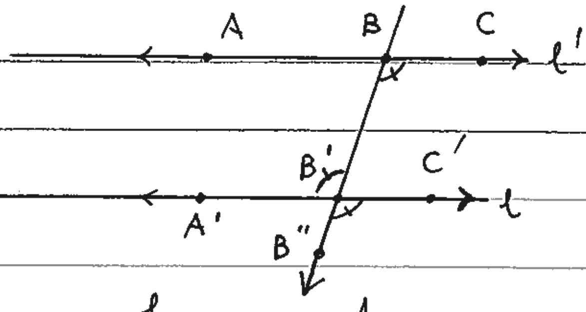
KOROLLAR 6.5.4; s108:

Hvis l og l' er linjer som skjæres av en transversal s.a. to korre-

(ØVING 8, V 2010, . , lösning)

sponderende vinkler er kongruente, så vil $l \parallel l'$

BEVIS:



Vi ser på de korresponderende vinkler $\angle CBB'$ og $\angle C'B'B''$, og vi antar at disse er kongruente. Siden $\angle A'B'B$ og $\angle B''B'C'$ er toppvinkler, vil $\angle A'B'B \cong \angle C'B'B''$. Dermed har vi:

$$\angle A'B'B \cong \angle CBB'$$

Men vi har dermed fra AIVT (Alternativ-indre-vinkel-teoremet) (Teorem 6.5.2, s 108) at $l \parallel l'$.

De øvrige tilfeller behandles helt analogt.

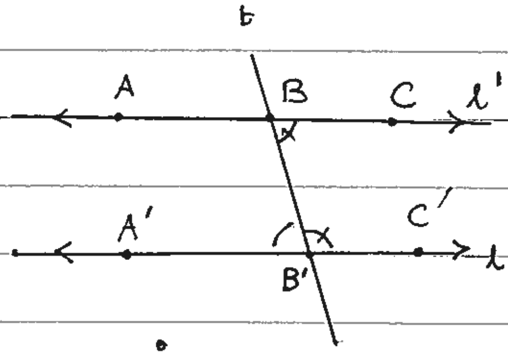
Oppgave 6.18, s.132:

Vi skal bevise

KOROLLAR 6.5.5:

Hvis l og l' skjæres av en transversal t s.a. to ikke-alternative indre vinkler på samme side av t er supplementære, så vil $l \parallel l'$

BEVIS:



Vi antar her at

$\mu(\angle CBB') + \mu(\angle C'B'B) = 180$

Siden vi også har:

$\mu(\angle C'B'B) + \mu(\angle BB'A') = 180$, må $\angle CBB' \cong \angle BB'A$. Av AIVT följer det da $l \parallel l'$.

(Øving 8, V 2010, , lösning)

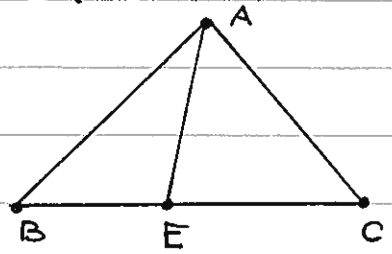
Oppgave 6.21, s. 133:

Vi skal bevise:

LEMMA 6.6.4:

Hvis $\triangle ABC$ er en trekant og $B * E * C$, da gjelder:

$$\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) = \sigma(\triangle ABC) + 180$$



BEVIS:

Siden $\overrightarrow{AE}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, har vi: $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle BAE) + \mu(\angle EAC)$. Videre har vi: $\mu(\angle BEA) + \mu(\angle CEA) = 180$ siden $B * E * C$. Vi har dermed:

$$\sigma(\triangle ABC) = \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle CAB)$$
$$\sigma(\triangle ABE) = \mu(\angle A\overset{1}{B}C) + \mu(\angle \overset{2}{B}EA) + \mu(\angle \overset{3}{E}AB)$$
$$\sigma(\triangle AEC) = \mu(\angle B\overset{4}{C}A) + \mu(\angle \overset{5}{C}AE) + \mu(\angle \overset{6}{A}EC)$$

Adderes de to siste likheter får vi:

$$\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle AEC) = \mu(\angle A\overset{1}{B}C) + \mu(\angle B\overset{4}{C}A) + \mu(\angle \underset{3}{E}AB) + \mu(\angle \underset{5}{E}AC) + \mu(\angle \underset{2}{B}EA) + \mu(\angle \underset{6}{C}EA)$$
$$= \mu(\angle \overset{3+5}{B}AC) + \mu(\angle A\overset{1}{B}C) + \mu(\angle B\overset{4}{C}A) + 180 = \sigma(\triangle ABC) + 180.$$

Oppgave 6.24, s. 133:

Vi skal bevise at hypotenusen er den lengste side i en rettvinklet trekant.

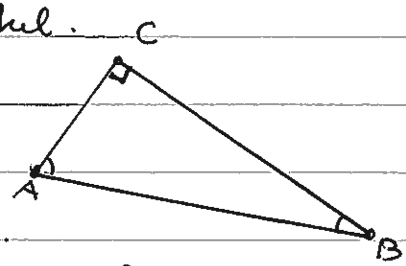
BEVIS:

Vi har at hypotenusen er motstående

(Øving 8, V 2010, løsning)

side til den rette vinkel.

Vi kan som i Oppg. 6.14 bevise at de to øvrige vinkler i $\triangle ABC$ er spisse.



Da følger påstanden straks fra Teorem 6.4.1. (Scalene Inequality)

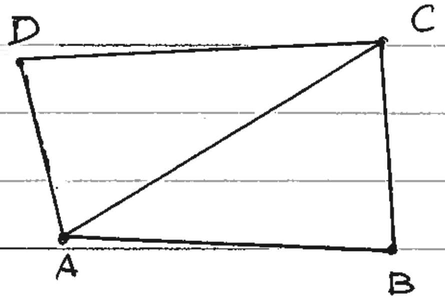
Oppgave 6.25, s. 133:

Vi skal bevise:

TEOREM 6.7.5:

Hvis $\square ABCD$ er et konvekst kvadrilateral, så er $\sigma(\square ABCD) \leq 360$

BEVIS:



Siden $\square ABCD$ er konvekst er C et indre punkt i $\angle DAB$.

Vi har dermed:

$\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = \mu(\angle DAB)$

Siden A er et indre punkt i $\angle DCB$, har vi også:

$\mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) = \mu(\angle BCD)$

Av dette følger:

$$\sigma(\triangle ABC) + \sigma(\triangle CDA) =$$
$$\overset{1}{\mu(\angle ABC)} + \overset{2}{\mu(\angle BCA)} + \overset{3}{\mu(\angle CAB)}$$
$$+ \overset{4}{\mu(\angle ACD)} + \overset{5}{\mu(\angle CDA)} + \overset{6}{\mu(\angle DAC)}$$
$$= \overset{1}{\mu(\angle ABC)} + \overset{5}{\mu(\angle CDA)} + \overset{2+4}{\mu(\angle BCD)} + \overset{3+6}{\mu(\angle DAB)}$$
$$= \sigma(\square ABCD).$$

Siden $\sigma(\triangle ABC) \leq 180$ og $\sigma(\triangle CDA) \leq 180$, følger det derfor at $\sigma(\square ABCD) \leq 360$.

(Øving 8, v 2010, lösning.)

Oppgave 6.27, s. 133:

To sider i et kvadrilateral $\square ABCD$ sies å vare semiparallelle dersom de er motstående som f.eks. $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$ og det er s.a.

$$\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset \quad \text{og} \quad \overleftrightarrow{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$$

Vi skal da bevise följende:

(a) Hvis et par av motstående sider er semiparallelle, så gjelder det samme for det andre par av motstående sider.

La oss anta at $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$ er semiparallelle. Da påstår vi at også $\overline{BC}$ og $\overline{DA}$ er semiparallelle.

Anta (RAA) at $\overline{BC}$ og $\overline{DA}$ ikke er semiparallelle: $\overleftrightarrow{BC} \cap \overline{DA} \neq \emptyset$ (UTAG)

Vi betegner $\overleftrightarrow{BC} \cap \overline{DA} = \{E\}$.

Siden vi krever at tre hjørner i et kvadrilateral ikke skal vare kolineære, må da $E \neq D$ og $E \neq A$, og $B * E * C$ er umulig ut fra definisjonen av kvadrilateral. Altså har vi enten

$$E * B * C \quad \text{eller} \quad B * C * E$$

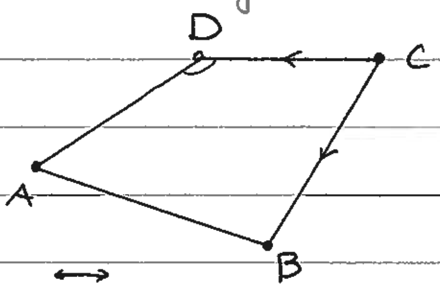
$B * C * E$: Dette gir: $A \not\sim E$ (rel. $\overleftrightarrow{DC}$) siden $A \sim B$ (rel $\overleftrightarrow{DC}$) (semiparallellitet antatt) ok. og $B \not\sim E$ (rel $\overleftrightarrow{DC}$) (siden $B * C * E$)

Av dette följer: $E \notin \overline{AD}$ i strid med at $\overleftrightarrow{BC} \cap \overline{AD} \neq \emptyset$.

(Øving 8, V2010, lösning.)

E * B * C: Vi har da: $D \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) p.g.a semiparallelliteten. Videre har vi $E \not\sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) ut fra $E * B * C$. Tilsammen gir dette: $D \not\sim E$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$). Altså vil $\overline{DE} \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset$. Men vi har $E \in \overline{AD}$, m.a.o. at $D \sim E$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$).

Antagelsen $\overline{BC} \cap \overline{DA} \neq \emptyset$ vil helt analogt også være i strid med antagelsen om at $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$ er semiparallelle.



(b)

(i) A er indre punkt i $\angle BCD \iff$
$\overline{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \emptyset$ og $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$

(ii) B er indre punkt i $\angle CDA \iff$
$\overline{BC} \cap \overleftrightarrow{DA} = \emptyset$ og $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{DC} = \emptyset$

(iii) C er indre punkt i $\angle DAB \iff$
$\overline{BC} \cap \overleftrightarrow{DA} = \emptyset$ og $\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$

(iv) D er indre punkt i $\angle ABC \iff$
$\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ og $\overline{DA} \cap \overleftrightarrow{BC} = \emptyset$.

Vi har at $\square ABCD$ pr. def. er konveks hvis og bare hvis alle hjørner er indre punkt i motstående vinkel. Ut fra dette og de ovenstående ser vi at $\square ABCD$ er konvekst hvis og bare hvis hvert par av motstående sider er semiparallelle.

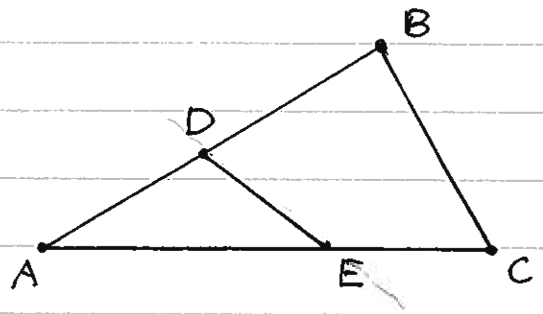
(Øving 8, løsn. V 2010)

Oppgave 6.29, s. 133:

Vi skal bevise:

TEOREM 6.7.8:

Hvis $\triangle ABC$ er en trekant, $A*D*B$ og $A*E*C$, så er $\square BCED$ et konvekst kvadrilateral.



BEVIS:

Det er tilstrekkelig å bevise at de to par av motstående sider er semiparallelle. Først og fremst vet vi da at ingen sider skjærer hverandre unntatt i hjørnene. Altså følger det da at $\square BCED$ er et kvadrilateral. Det følger dessuten fra oppgave 6.27 at $\square BCED$ er konvekst.

(i) $\overline{DE} \cap \overleftrightarrow{BC} = \emptyset$: Både D og E ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$ som A.

(ii) $\overleftrightarrow{DE} \cap \overline{BC} = \emptyset$: Både B og C ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{DE}$ i forhold til A.

(iii) $\overline{CE} \cap \overleftrightarrow{BD} = \emptyset$: $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{EC} = \{A\}$ og $A \notin \overline{CE}$ siden $A*E*C$.

(iv) $\overleftrightarrow{CE} \cap \overline{BD} = \emptyset$: $\overleftrightarrow{CE} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{A\}$ og $A \notin \overline{BD}$ siden $A*B*D$.

Altså er $\square BCED$ et konvekst kvadrilateral. $\therefore$

(At det blir et kvadrilateral bygger på alle punktene (i)-(iv).)

MA 2401, GEOMETRI

ØVING 9, 15/3 og 16/3 - 2010

LØSNINGER:

Oppgave 6.31, s. 133:

Vi skal bevise følgende

KOROLLAR 6.7.10 (s. 116):

Hvis $\square ABCD$ og $\square ACBD$ begge er kvadrilateraler, så er $\square ABCD$ ikke konvekst. Hvis $\square ABCD$ er et ikke-konvekst kvadrilateral, så er $\square ACBD$ et kvadrilateral.

Vi trenger her:

TEOREM 6.7.9 (s. 115):

Et kvadrilateral $\square ABCD$ er konvekst hvis og bare hvis diagonalene $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ skjærer hverandre i et indre punkt.

BEVIS FOR KOROLLAR 6.7.10:

- Hvis $\square ABCD$ er konvekst vil $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ skjære hverandre i et indre punkt. Men ut fra definisjonen av kvadrilateral (s. 113) er da $\square ACBD$ ikke et kvadrilateral.
- Dersom $\square ABCD$ ikke er et konvekst kvadrilateral, vil $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$. Siden dessuten $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \emptyset$ ut fra definisjonen av et kvadrilateral, vil $\square ACBD$ være et kvadrilateral.

Oppgave 6.37, s. 133:

Vi skal bevise ekvivalensen:

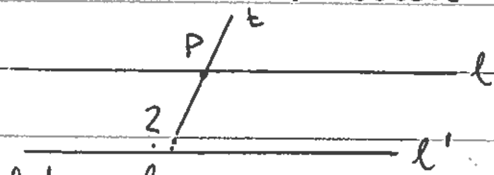
Euklids parallellpostulat

$\Updownarrow$

Hvis $l \| l'$ og $t \neq l$ er s.a. t skjærer l, så må t også skjære l'.

MERKNAD:

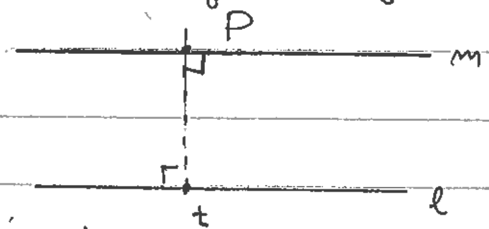
Med Euklids parallellpostulat menes her det som på s.120 øverst kalles Hilberts parallellpostulat.



BEVIS:

$\Downarrow$: Her fører vi et indirekte bevis.
Vi antar derfor at $l \| l'$, t skjærer l i P og at t ikke skjærer l'.
Siden $t \neq l$ betyr dette at både l og t er paralleller til l' gjennom P. Dette er i strid med Euklids (Hilberts) parallellpostulat.

$\Uparrow$: La l være vilkårlig linje og $P \notin l$. La t være normalen fra P på l og m normalen til t i P. Da vet vi ut



s107 → fra AIVT at $m \| l$. Ut fra vår antagelse vil enhver annen linje som skjærer m i P skjære l. Altså er m den eneste linje gjennom P s.a. $m \| l$.

Oppgave 6.38, s.133:

Vi skal bevise ekvivalensen:

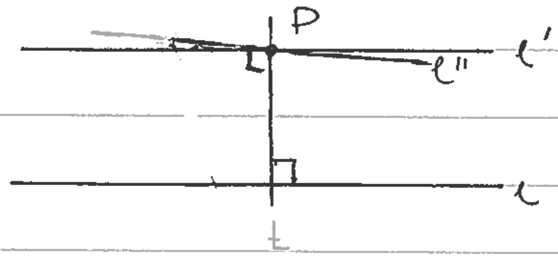
Euklids parallellpostulat

$$\Updownarrow$$

Hvis $l \parallel l'$ og t er en transversal s.a. $t \perp l$, da er også $t \perp l'$.

BEVIS:

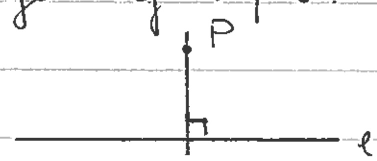
$\Downarrow$: Vi antar at $l \parallel l'$ og t er en transversal s.a. $t \perp l$. Ut fra



forrige oppgave må da t også skjære l'. La oss kalle skjæringspunktet mellom t og l' for P. Oppreises normalen l'' til t i P vet vi (fra det vi MAIVT bemerket i forrige oppgave) at $l'' \parallel l$. Men ut fra Hilberts/Euklids parallell-postulat må da $l'' = l'$. Altså

$$l' \perp t.$$

$\Uparrow$: La l være vilkårlig linje og $P \notin l$. La t være normalen fra P på l. Siden t også må



stå normalt til en parallell m til l gjennom P ut fra antagelsen, er en slik parallell m entydig bestemt ut fra entydigheten i (3) av Aksiom 5.6.2

Oppgave 6.39, s. 133:

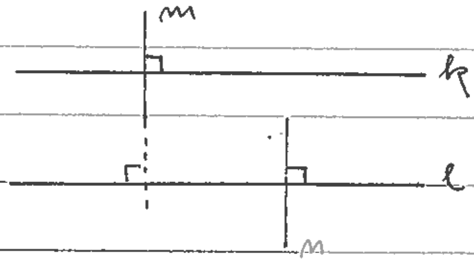
Vi skal bevise ekvivalensen:

Euklids parallellpostulat

$\Updownarrow$

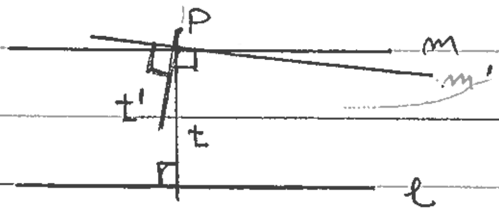
Hvis l, m, n og k er linjer s.a. $k \parallel l$, $m \perp k$, $n \perp l$, så må enten $m = n$ eller $m \parallel n$.

BEVIS:



$\Downarrow$: Siden $k \parallel l$ og $m \perp k$, så må i fölge forrige oppgave $m \perp l$. Hvis $m \neq n$, får vi fra AIVT at $m \parallel n$.

$\Uparrow$: La l være vilkårlig og $P \notin l$. Vi konstruerer t slik som i forrige oppgave og lar m være normalen til t gjennom P. Da er $m \parallel l$. La så m' være en vilkårlig parallell til l gjennom P og la t' være normalen til m' gjennom P. I fölge antagelsen må da $t = t'$ eller $t \parallel t'$. Men P ligger på både t og t' og derfor må $t = t'$. P.g.a. entydigheten av normal til t i P må dermed $m' = m$.



Oppgave 6.40, s.134:

Vi skal bevise at:

Euklids parallellpostulat

$\Updownarrow$

Hvis $l \| m$ og $m \| n$ så er enten $l = n$ eller $l \| n$.

BEVIS:

$\Downarrow$: Anta at $l \| m$ og at $m \| n$ og at $l \cap n = \{P\}$. Da vil l og n være to paralleller til m gjennom P, i strid med Hilberts (Euklids) parallellpostulat.

$\Uparrow$: La l være en vilkårlig linje og $P \notin l$. La m og m' være paralleller til l gjennom P. D.v.s. at $m \| l$ og $l \| m'$. Ut fra antagelsen må da $m = m'$ eller $m \| m'$. Det siste alternativet er utelukket siden $P \in m$ og $P \in m'$. Altså må $m = m'$. Altså holder Hilberts parallellpostulat.

Oppgave 6.41, s.134.

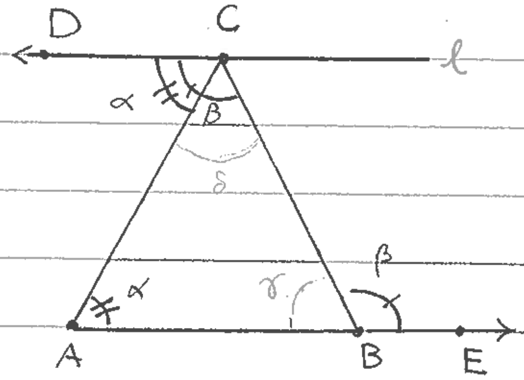
Vi skal bevise:

Euklids parallellpostulat

$\Downarrow$

Vinkelsummen i en vilkårlig trekant er 180.

BEVIS: I følge Teorem 6.8.1 er Euklids parallellpostulat ekvivalent med det motsatte av AIVT. Vi lar l



være en linje gjennom C s.a. $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Vi lar D være et punkt på l s.a. A og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$.

Hvis $E \in \overrightarrow{AB}$ s.a. $A * B * E$, har vi fra det motsatte av AIVT at

$$\angle DCB \cong \angle EBC.$$

Dette gir:

(▽) $\mu(\angle DCB) = 180 - \mu(\angle ABC)$

$\gamma + \beta = 180$
$\beta = \alpha + \delta$
⇓
$\alpha + \beta + \delta = 180$

Videre har vi (igjen ved det motsatte til AIVT) at:

$$\angle BAC \cong \angle ACD$$

(*) (Her trenger vi det faktum at B og D ligger på motsatte sider av $\overleftrightarrow{AC}$!) Av dette følger:

(▽▽) $\mu(\angle DCB) = \mu(\angle DCA) + \mu(\angle ACB)$
$\qquad = \mu(\angle BAC) + \mu(\angle ACB)$

Kombinerer vi nå (▽) og (▽▽) får vi:

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BAC) + \mu(\angle ACB) = 180$$

eller ekvivalent:

$$\sigma(\triangle ABC) = 180.$$

(*) (Ekvivalent med denne påstand er at A er et indre punkt i $\angle DCB$: A og B ligger på samme side av $\overleftrightarrow{DC}$ fordi $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ og A og D ligger på samme side av $\overrightarrow{BC}$.)