MA 2401, GEOMETRI

LØSNING, TEST 1 B

8/2 - 2011

OPPGAVE 1:

(i) Vi skal bevise at $\sqrt{7}$ er et irrasjonalt tall.

Vi antar det motsatte, nemlig at det finnes naturlige tall p og q s.a.

(*) $$\sqrt{7} = \frac{p}{q}$$

Vi kan uten tap av generalitet anta at p og q ikke inneholder felles primfaktorer ved å forkorte brøken så mye som mulig. Dette siste skrives:

$$(p,q) = 1 \quad \text{eller} \quad \gcd(p,q) = 1$$

Fra (*) følger: $q\sqrt{7} = p$ og videre

$$7q^2 = p^2$$

Siden venstresiden er delbar med 7 må høyresiden p^2 være delbar med 7: $7|p^2$. Siden 7 er et primtall må dermed

(**) $$7|p \quad \text{eller} \quad p = 7p_1$$

der p_1 er et naturlig tall. Altså:

$$7q^2 = 49p_1^2$$

eller $q^2 = 7p_1^2$. Altså må

(***) $$7|q^2 \quad \text{og dermed} \quad 7|q$$

Fra (**) og (***) følger det at både p og q er delbare med 7, i strid med at $(p,q)=1$. Siden antagelsen om at $\sqrt{7}$ er et rasjonalt tall har ført til en selvmotsigelse, må antagelsen forkastes! $\sqrt{7}$ er altså et irrasjonalt tall.

(ii) Hvorfor kan dette argumentet ikke gjennomføres når vi starter med $\sqrt{4}$ i stedet for $\sqrt{7}$?

Går vi gjennom argumentet trinn for trinn merker vi oss at:

$$7 \mid p^2 \Rightarrow 7 \mid p$$

holder fordi 7 er et primtall. Sagt litt anderledes: Hvis 7 ikke forekommer i primtallsfaktorisering av p:

$$p = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

så vil 7 heller ikke forekomme i primtallsfaktoriseringen av p^2:

$$p^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdots p_m^{2\alpha_m}$$

Vi kan selvsagt ikke slutte at:

$$4 \mid p^2 \Rightarrow 4 \mid p,$$

fordi $4 \mid p^2$ bare medfører at $2 \mid p$.

MERKNAD:

Å bare si at argumentet umulig kan holde fordi vi vet at

$$\sqrt{4} = 2, \quad 2 \text{ rasjonalt},$$

er jo riktig. Men det gir jo ingen informasjon om hvor argumentet for $\sqrt{7}$ bryter sammen for $\sqrt{4}$

TEST 1A

Oppgave 1: Samme argument med $\sqrt{5}$ i stedet for $\sqrt{7}$.

OPPGAVE 2: (Test 1A)

Drosjemetrikken i $\mathbb{R}^2$ er definert som:

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$$

La l være linjen gitt ved:

$$l: \quad y = -3x + 1$$

Vi definerer en funksjon $f: l \to \mathbb{R}$ ved:

$$f(x,y) = 4x$$

Vi skal bevise at f er en koordinat-funksjon for linjen l. D.v.s. at vi skal bevise følgende:

(i) f er injektiv (one-to-one)

(ii) f er surjektiv (onto $\mathbb{R}$)

(iii) $|f(P) - f(Q)| = PQ$

(i) Anta at $f(P) = f(Q)$. Vi må da bevise at $P = Q$. (Ekvivalent: $P \neq Q \Rightarrow f(P) \neq f(Q)$.)

$P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$; $f(P) = f(Q)$ betyr at $f(x_1,y_1) = 4x_1 = 4x_2 = f(x_2,y_2)$. Altså må $x_1 = x_2$. Vi må også vise at $y_1 = y_2$. Men vi har her:

$$y_1 = -3x_1 + 1 = -3x_2 + 1 = y_2$$

siden $x_1 = x_2$. Altså må $P = Q$.

(ii) La $r \in \mathbb{R}$, et vilkårlig reelt tall. Vi må bevise at det finnes et punkt $P = (x,y)$ som er s.a. $f(P) = r$, eller: $4x = r$. Vi velger da $x = \frac{r}{4}$ og får da:

$$f\left(\frac{r}{4}, -\frac{3}{4}r + 1\right) = 4\left(\frac{r}{4}\right) = r.$$

(iii) Vi har, når $P=(x_1,y_1)$ og $Q=(x_2,y_2)$:

$$|f(P)-f(Q)| = |4x_1-4x_2| = 4|x_1-x_2|$$

Dessuten har vi:

$$PQ = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|.$$

Men siden P og Q ligger på l, har vi:

$$|y_1-y_2| = |(-3x_1+1)-(-3x_2+1)| = 3|x_1-x_2|$$

Altså:

$$PQ = |x_1-x_2| + 3|x_1-x_2| = 4|x_1-x_2|$$

M.a.o. har vi at

$$|f(P)-f(Q)| = PQ$$

Altså er f en koordinatfunksjon for linjen l.

TEST 1B

Oppgave 2: Samme argument med linjen $y=-x+1$ og $f(x,y)=2x$ i stedet for

$$y=-3x+1 \quad \text{og} \quad f(x,y)=4x.$$