A

BEVIS FOR

TEOREM 6.8.1 / TEOREM 6.8.2:

Innenfor nöytral geometri er fölgende egenskaper ekvivalente:

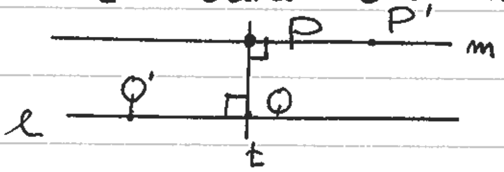
(i) Det motsatte av alternativ-indre-vinkel-teoremet, (MAIVT).

(ii) Hilberts parallellpostulat, (HPP).

(iii) Euklids 5. postulat, (E V).

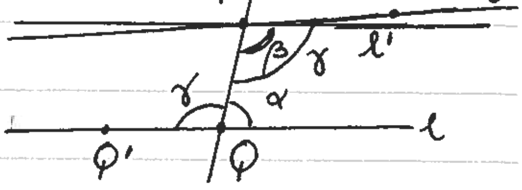
BEVIS:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Vi antar at MAIVT gjelder. La l være en linje og P et punkt



s.a. $P \notin l$. Vi må bevise at det finnes eksakt en linje m som går gjennom P og er parallell med l. Eksistensen av en slik linje m fölger fra Cor. 6.5.6, s.109. Det gjenstår da å bevise entydigheten av m. Lar vi t være perpendikulæren fra P ned på l, gir MAIVT at $\angle QPP'$ må være lik $\angle PQQ'$, altså en rett vinkel. Ut fra del (3) av transportör-postulatet (Aksiom 5.6.2) finnes det bare en stråle $\overrightarrow{PP'}$ som er s.a. $\mu(\angle QPP') = 90°$. Altså er $\overleftrightarrow{PP'}$ entydig bestemt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vi antar at HPP gjelder. Vi antar så at l og l' er to linjer og t en transversal s.a. $\alpha + \beta < 180°$.



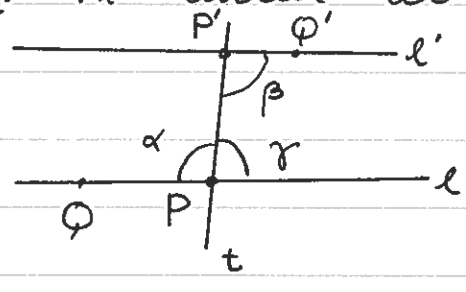
Vi må bevise at l og l' skjærer hverandre på den siden av t der α og β ligger. Vi observerer da först at

$$\alpha + \gamma = 180$$

Siden vi har: $\alpha + \beta < 180$, må da $\beta < \gamma$. La l'' være en linje gjennom P s.a. $\angle QPP'' \cong \angle PQQ'$. Da er $l'' \parallel l$ ut fra ytre-vinkel-teoremet (YVT). Siden $\beta < \gamma$, er $l' \neq l''$. Altså er l' ikke parallell med l.

Det gjenstår da å bevise at l og l' skjærer hverandre til höyre for t på figuren (på den siden der $\angle\alpha$ og $\angle\beta$ ligger!) Siden $\gamma > \beta$ gir YVT at l og l' ikke kan skjære hverandre på den andre siden av t.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u>: Vi antar at EV gjelder.



Vi antar at l og l' er parallelle og at t er en trasversal. Vi skal bevise at $\angle QPP' \cong \angle Q'P'P$. Antar vi at $\alpha \neq \beta$, kan vi uten tap av generalitet anta at $\beta < \alpha$. Siden $\alpha + \gamma = 180$, må $\beta + \gamma < 180$. Ut fra EV vil da l og l' skjære hverandre på den siden der β og γ ligger. Analogt får vi skjæring på motsatt side dersom $\alpha < \beta$. Altså må $\alpha = \beta$. $\square$