Chebyshev-polynomer

Chebyshev-polynomene er definert ved

$$T_n(x) = \cos\left[n \arccos x\right], \qquad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,\ldots$$

De oppfyller følgende rekursjonsformel (se øving 4)

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x \\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n = 2,3,\ldots \end{aligned}$$

Chebyshev-polynomene har (blant mye annet) følgende egenskaper:

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \text{og} \quad T_n(\hat{x}_i) = (-1)^i, \quad \hat{x}_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{1}$$

$$T_n(x_i) = 0, \qquad \text{for} \quad x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right), \quad i = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2}$$

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots \tag{3}$$

La

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \in \tilde{\mathbb{P}}_n$$

der $\tilde{\mathbb{P}}_n = \{p \in \mathbb{P}_n, \quad p(x) = x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_0\}$.

Teorem (*min/max egenskap*): Polynomene $\tilde{T}_n(x)$ tilfredstiller

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x \in [-1,1]} \left|\tilde{T}_n(x)\right| \leq \max_{x \in [-1,1]} |q(x)|, \quad \text{for alle} \quad q \in \tilde{\mathbb{P}}_n.$$

Bevis: Anta at $q \in \tilde{\mathbb{P}}_n$ tilfredstiller

$$\max_{x \in [-1,1]} |q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La $r = \tilde{T}_n - q$, slik at $r \in \mathbb{P}_{n-1}$. Det betyr

$$r(\hat{x}_i) < 0 \quad \text{for } i \text{ odde}, \qquad r(\hat{x}_i) > 0 \quad \text{for } i \text{ like}, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

og r må ha minst en rot i hvert av intervallene $(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1})$, $i = 0,1,\cdots,n-1$. Polynomet r er derimot av grad $n-1$ og har altså minst n nullpunkter. Dette viser at antagelsen er feil.

$\square$

Kombinert med Teorem 1 s.156 i C&K gir dette

Korrolær: Hvis $p(x) \in \tilde{\mathbb{P}}_n$ hvor interpolasjonsnodene er nullpunktene til $T_{n+1}(x)$ har vi

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|, \qquad f \in C^{n+1}[-1,1].$$