Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Tormod Bjøntegaard (41 93 06 80)

EKSAMEN I NUMERISKE METODER (MA2501)

Torsdag 10. juni 2010
Tid: 09:00 – 13:00

Sensur 1. juli 2010

Hjelpemidler:
- Cheney & Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 5. eller 6.utgave
- Rottmann, *Matematisk formelsamling*
- Godkjent kalkulator

Oppgave 1 Gitt datasettet:

x	1	$\frac{3}{2}$	2
y	-1	3	3

a) Finn polynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer datasettet.

b) Bestem konstantene a, b og c slik at $p(x)$ interpolerer funksjonen

$$f(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x) + c$$

i de tre punktene $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ og $x = 2$.

c) Finn en øvre grense for feilen $|f(x) - p(x)|$ for $1 \leq x \leq 2$.

Oppgave 2 Vi har en 3×3 tridiagonal matrise som kan faktoriseres som $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

a) Finn formler for de ukjente $l_{21}, l_{32}, u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{23}, u_{33}$ uttrykt ved elementer i $\mathbf{A}$ (Du kan anta at pivotering ikke er nødvendig).

La

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Beregn $\mathbf{L}$ og $\mathbf{U}$ slik at $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ (hvor $\mathbf{L}$ er nedre triangulær med 1 langs diagonalen og $\mathbf{U}$ er øvre triangulær).

c) Løs systemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Doolittle's algoritme for $\mathbf{LU}$-faktorisering av en generell matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er gitt som:

input $n, (a_{ij})$
for $k = 1$ to n **do**
  $l_{kk} \leftarrow 1$
  for $j = k$ to n **do**
    $u_{kj} \leftarrow a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}$
  end for
  for $i = k + 1$ to n **do**
    $l_{ik} \leftarrow \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} \right) \Big/ u_{kk}$
  end for
end for
return $(l_{ij}), (u_{ij})$

hvor a_{ij}, l_{ij} og u_{ij} er matriseelementer i henholdsvis $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$ og $\mathbf{U}$.

d) Anta nå at $\mathbf{A}$ er en $n \times n$ tridiagonal matrise. Denne kan faktoriseres slik at $\mathbf{L}$ og $\mathbf{U}$ har samme struktur som for 3×3-systemet i starten av oppgaven. Modifiser Doolittle's algoritme og skriv ned en algoritme som utnytter en slik matrisestruktur. Hvor mange flyttallsoperasjoner krever denne algoritmen ($\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n^3)$,...)?

Oppgave 3 Vi ønsker å løse Laplace-ligningen

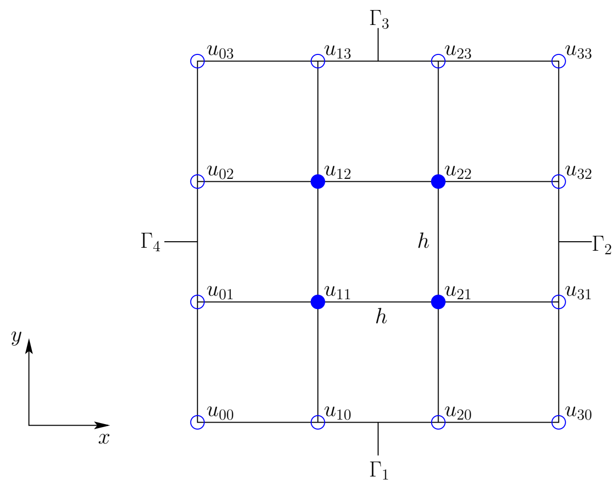
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in \Omega,$$

med randbetingelser

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_1} &= 1, \\ u|_{\Gamma_2} &= 1, \\ u|_{\Gamma_3} &= 1, \\ u|_{\Gamma_4} &= \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right). \end{aligned}$$

Vi vil først se på tilfellet når Ω er et kvadrat, $\Omega = (0, L)^2$. Vi diskretiserer området med 4 punkter i hver retning og uniform skrittlengde $h = \frac{L}{3}$ (se Figur 1). u_{ij} vil her være en approksimasjon til $u(x_i, y_j)$, hvor $x_i = i \cdot h$ og $y_j = j \cdot h$. Vi vil bruke 5-punktsformelen som differanseskjema,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \simeq \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) + u(x - h, y) + u(x, y + h) + u(x, y - h) - 4u(x, y)].$$



Figur 1: Ω

a) Sett opp det lineære ligningssystemet. (Du skal ikke løse det resulterende systemet.)

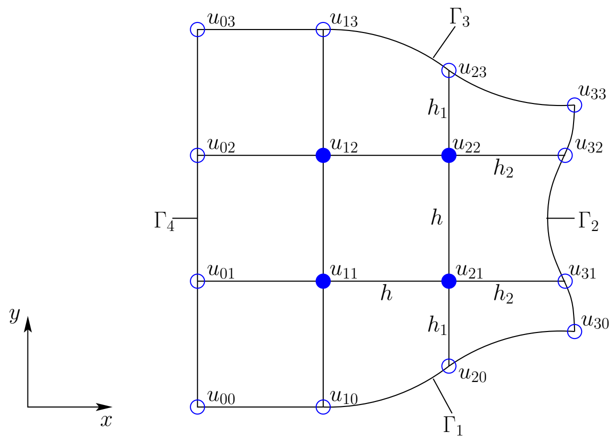
Vi skal nå løse det samme problemet på et deformert område spesifisert i Figur 2.

b) Vis at med $h_l = \alpha h$ og $h_r = \beta h$, hvor α, β er konstanter som oppfyller $0 < \alpha, \beta < 1$, vil

$$\frac{2}{h_l h_r + h_l^2} f(x - h_l) - \frac{2}{h_l h_r} f(x) + \frac{2}{h_l h_r + h_r^2} f(x + h_r)$$

være en første ordens approksimasjon til $f''(x)$ når $\alpha \neq \beta$.

c) Ved å bruke grid'et i Figur 2; sett opp det lineære ligningssystemet som må løses for dette modifiserte problemet.



Figur 2: Ω

Oppgave 4 For de følgende påstandene; velg et svaralternativ. Du skal *ikke* ha med utregning eller begrunne svaret.

a) Med $a = x_0$, $b = x_n$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $f_i = f(x_i)$ og $a = x_0 < \xi < x_n = b$ har vi integrasjonsformlene (med feilledd):
Simpson's $\frac{1}{3}$-Metode:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}h[f_0 + 4f_1 + f_2] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

Simpson's $\frac{3}{8}$-Metode:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}h[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

Simpson's $\frac{3}{8}$-Metode er normalt mer nøyaktig enn **Simpson's $\frac{1}{3}$-Metode**.
Svar: Sant/Ikke sant

b) Newton's metode blir ofte karakterisert som en *lokal* metode som fungerer best nærme nullpunktet.
Svar: Sant/Ikke sant

c) Vi har to numeriske metoder som approksimerer en gitt størrelse:
Metode 1:
$$\text{Feil} \sim \mathcal{O}(h)$$
Metode 2:
$$\text{Feil} \sim \mathcal{O}(h^2)$$
h er her en steglengde, og vi antar arbeid per steg er likt for de to metodene. For å oppnå en spesifisert feil vil **Metode 2** alltid være mer effektiv enn **Metode 1**.
Svar: Sant/Ikke sant

d) Hovedgrunnen til å velge en implisitt metode i stedet for en eksplisitt metode for numerisk løsning av ODE er bedre stabilitetsegenskaper.
Svar: Sant/Ikke sant

e) En naturlig kubisk spline som oppfyller interpolasjonsbetingelser i alle skjøtepunkter, t_i, $i = 0, \ldots, n$, er unik.
Svar: Sant/Ikke sant

f) Det fins kun *en* Runge-Kutta metode av orden 4.
Svar: Sant/Ikke sant