MA2501 Numeriske metoder

Notat om fikspunktiterasjoner

Et *fikspunkt* for en gitt funksjon g er et tall r slik at $r = g(r)$. Et fikspunkt iterasjons-skjema er et gitt ved

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

I dette notatet er vi i første omgang interessert i å vite:
- Fins et fikspunkt?
- Er det i så fall unikt?
- Hvis det fins et fikspunkt, vil fikspunktiterasjonene konvergere mot dette?

Følgende teorem gir et tilstrekkelig svar:

Teorem 1 *Anta at*

i) *$g \in C[a, b]$ og $g(x) \in [a, b]$ for alle $x \in [a, b]$.*

ii) *$g'(x)$ eksisterer for alle $x \in (a, b)$ og det fins en positiv konstant $\rho < 1$ slik at*

$$|g'(x)| \le \rho < 1, \qquad \text{for alle } x \in (a, b).$$

1. *Hvis antagelse i) er oppfylt, så fins minst et fikspunkt i $[a, b]$.*
2. *Hvis antagelse ii) er oppfyllt i tillegg til i), så er fikspunktet unikt, og fikspunktiterasjonene konvergerer mot dette for alle startverdier $x_0 \in [a, b]$.*

Bevis: La oss starte med å vise eksistensen av et fikspunkt. Hvis $g(a) = a$ eller $g(b) = b$ så så har vi funnet det. La oss derfor se på situasjonen hvor hverken a eller b er et fikspunkt. Da må $g(a) > a$ og $g(b) < b$. Definer en funksjon $h(x) = g(x) - x$. Da vil

$$h(a) = g(a) - a > 0 \qquad \text{og} \qquad h(b) = g(b) - b < 0.$$

Siden h er kontinuerlig på $[a, b]$, og h skifter fortegn, må det finnes en $r \in (a, b)$ slik at $h(r) = 0$, denne r er dermed et fikspunkt for g.

Vi viser entydigheten av fikspunktet ved å vise at to ulike fikspunkt er en umulighet når antagelse *ii)* er oppfylt. La r og q begge være fikspunkt av g i intervallet $[a, b]$, og anta at $r \neq q$. Middelverditeoremet forteller at det fins en ξ mellom r og p slik at

$$r - q = g(r) - g(q) = g'(\xi)(r - q).$$

Siden r og q ligger i $[a,b]$ må nødvendigvis $\xi \in (a,b)$. Dersom *ii)* er oppfylt gjelder

$$|r-q| = |g(r)-g(q)| = |g'(\xi)||r-q| < |r-q|$$

hvilket er umulig. Det fins altså bare et fikspunkt under antagelse *i)*.

La oss så se på fikspunktiterasjonene. Anta at $x_0 \in [a,b]$. Siden $g(x) \in [a,b]$ for alle $x \in [a,b]$, vil $x_n \in [a,b]$, $n = 0,1,2,\cdots$. Dermed gjelder

$$|r-x_n| = |g(r)-g(x_{n-1})| = |g'(\xi_n)||r-x_{n-1}| < \rho|r-x_{n-1}| < \rho^n|r-x_0|.$$

Og siden $\rho < 1$ har vi at

$$\lim_{n\to\infty} |r-x_n| \leq \lim_{n\to\infty} \rho^n|r-x_0| = 0.$$

□

Vi har følgende resultat for en øvre grense for feilen:

Korrolær 1 *Hvis betingelsene i) og ii) er oppfylt så gjelder*

$$|r-x_n| \leq \rho^n \max\{x_0-a, b-x_0\}$$

og

$$|r-x_n| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho}|x_1-x_0|$$

for alle $n \geq 1$.

Bevis: Det første utsagnet følger av at $|r-x_0| \leq \max\{x_0-a, b-x_0\}$. For å vise det andre, la

$$r-x_1 = g(r)-g(x_0) = g(r)-g(x_1)+g(x_1)-g(x_0) = g'(\xi_1)(r-x_1)+g'(\xi_2)(x_1-x_0)$$

Bruk trekantulikheten og antagelse *ii)*, dvs.

$$|r-x_1| \leq \rho|r-x_1| + \rho|x_1-x_0|$$

eller

$$|r-x_1| \leq \frac{\rho}{1-\rho}|x_1-x_0|$$

Dermed har vi

$$|r-x_n| \leq \rho^{n-1}|r-x_1| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho}|x_1-x_0|.$$

□

Korrolær 2 *Anta at $g'(x)$ er kontinuerlig nær r.*

1. *Hvis $|g'(r)| < 1$ så konvergerer fikspunktiterasjonene hvis startverdiene er tilstrekkelig gode.*
2. *Hvis $|g'(r)| > 1$ så konvergerer ikke fikspunktiterasjonene.*

Vi sier at et iterasjonsskjema konvergerer mot r med konvergens orden k dersom det fins en $M < \infty$ slik at

$$|r - x_{n+1}| \leq M|r - x_n|^k$$

Teorem 2 *Dersom g er $k \geq 1$ ganger kontinuerlig deriverbar rundt et fikspunkt r, og $g'(r) = g''(r) = \cdots = g^{(k-1)}(r) = 0$, mens $g^{(k)}(r) \neq 0$, så konvergerer fikspunkt-skjemaet $x_{n+1} = g(x_n)$ mot r med konvergensorden k, forutsatt at startverdiene er tilstrekkelig nær r.*

Bevis: La $e_n = r - x_n$. Ved å Taylor-utvikle g rundt r får vi

$$\begin{aligned} r - x_{n+1} &= g(r) - g(x_n) = g(r) - g(r - e_n) \\ &= g'(r)e_n - \frac{1}{2}g''(r)e_n^2 - \cdots - \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}g^{(k-1)}(r) - \frac{(-1)^k}{k!}g^{(r)}(\xi)e_n^k. \end{aligned}$$

Siden $g^{(k)}(r)$ er kontinuerlig rundt r, så fins en M slik at $|g^{(k)}(x)|/k! \leq M$ i en nærhet av r. Vi antar at x_n (spesielt x_0) ligger i denne nærheten. Da gjelder

$$|r - x_{n+1}| \leq M|r - x_n|^k$$

Vi får altså konvergens av orden k forutsatt at x_0 i tillegg ligger tilstrekkelig nær r til at $M|r - x_0|^{k-1} < 1$.