EKSAMEN I NUMERISKE METODER (MA2501)
Juni 2010
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Siden vi har tre interpolasjonspunkter vil interpolasjonspolynomet ha maks grad 2, og kan uttrykkes som

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \ell_i(x),$$

hvor

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)}{\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2)} = (2x-3)(x-2),\\
\ell_1(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)} = -4(x-1)(x-2),\\
\ell_2(x) &= \frac{(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(2-1)\left(2-\frac{3}{2}\right)} = (x-1)(2x-3)\,.
\end{aligned}$$

Totalt gir dette

$$p(x) = -1\ell_0(x) + 3\ell_1(x) + 3\ell_2(x) = -8x^2 + 28x - 21.$$

b)

$$\begin{aligned}
f(1) &= -a + c = -1,\\
f(3/2) &= -b + c = 3,\\
f(2) &= a + c = 3.
\end{aligned}$$

Løsning av dette systemet gir $a = 2$, $b = -2$, $c = 1$.

c) Siden interpolasjonspunktene er uniformt fordelt har vi fra boka

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{1}{4 \cdot 3} M h^3.$$

hvor $M = \max_{1 \le x \le 2} |f^{(3)}(x)|$. Vi finner

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos(\pi x) - 2\sin(\pi x) + 1, \\ f^{(3)}(x) &= 2\pi^3 \sin(\pi x) + 2\pi^3 \cos(\pi x). \end{aligned} \tag{1}$$

Ekstremverdiene til $f^{(3)}(x)$ vil enten være på en av endepunktene eller hvor $f^{(4)}(x) = 0$. Vi har

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= 2\pi^4 \cos(\pi x) - 2\pi^4 \sin(\pi x) = 0, \\ &\Downarrow \\ \tan(\pi x) &= 1, \\ &\Downarrow \\ \pi x &= \arctan(1) = \frac{5\pi}{4} \\ &\Downarrow \\ x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Dette gir

$$f^{(3)}(5/4) = 2\pi^3 \frac{-\sqrt{2}}{2} + 2\pi^3 \frac{-\sqrt{2}}{2} = -2\pi^3\sqrt{2} \simeq -87.7.$$

Samtidig har vi

$$\begin{aligned} f^{(3)}(1) &= -2\pi^3 \simeq -62.0 \\ f^{(3)}(2) &= 2\pi^3 \simeq 62.0 \end{aligned}$$

Dvs.

$$\max_{1 \le x \le 2} |f^{(3)}(x)| = |f^{(3)}(5/4)| = 2\pi^3\sqrt{2}.$$

Totalt får vi dermed

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{1}{12} \cdot 2\pi^3\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3\sqrt{2}}{48} \simeq 0.9135.$$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}
&\underline{u_{11} = a_1},\\
&\underline{u_{12} = c_1},\\
&l_{21}u_{11} = b_1 \;\Rightarrow\; \underline{l_{21} = \frac{b_1}{a_1}},\\
&l_{21}u_{12} + u_{22} = a_2 \;\Rightarrow\; \underline{u_{22} = a_2 - \frac{b_1}{a_1}c_1},\\
&\underline{u_{23} = c_2},\\
&l_{32}u_{22} = b_2 \;\Rightarrow\; \underline{l_{32} = \frac{a_1 b_2}{a_1 a_2 - b_1 c_1}},\\
&l_{32}u_{23} + u_{33} = a_3 \;\Rightarrow\; \underline{u_{33} = a_3 - \frac{a_1 b_2 c_2}{a_1 a_2 - b_1 c_1}}.
\end{aligned}$$

b) Ved bruk av formlene fra forrige punkt finner vi

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

c) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kan løses i to steg:

1)

$$\mathbf{Lz} = \mathbf{b},$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

2)

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{z},$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

d) En algoritme tilpasset tridiagonale systemer kan se slik ut:

input $n, (a_{i,j})$
for $k = 1$ to n **do**
  $l_{k,k} \leftarrow 1$
  if $k = 1$ **then**
    $u_{k,k} \leftarrow a_{k,k}$
  else
    $u_{k,k} \leftarrow a_{k,k} - l_{k,k-1} u_{k-1,k}$
  end if
  if $k < n$ **then**
    $u_{k,k+1} \leftarrow a_{k,k+1}$
    $l_{k+1,k} = \frac{a_{k+1,k}}{u_{k,k}}$
  end if
end for
return $(l_{ij}), (u_{ij})$

Denne vil bruke $\mathcal{O}(n)$ operasjoner i motsetning til generell LU-dekomponering som bruker $\mathcal{O}(n^3)$ operasjoner.

Oppgave 3

a) 5-punktsformelen gir oss:

$$\begin{aligned}
u_{01} + u_{10} + u_{12} + u_{21} - 4u_{11} &= 0, \\
u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} - 4u_{21} &= 0, \\
u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13} - 4u_{12} &= 0, \\
u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} - 4u_{22} &= 0.
\end{aligned}$$

Vi flytter de kjente randverdiene på høyresiden og får

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -\frac{1}{2}, \\
u_{11} - 4u_{21} + u_{22} &= -2, \\
u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= -\frac{1}{2}, \\
u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -2.
\end{aligned}$$

Ved naturlig nummerering av de ukjente kan dette også uttrykkes som

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) Vi ønsker å finne a, b og c slik at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq af(x-h_l) + bf(x) + cf(x+h_r).$$

Taylor-utvikling gir

$$\begin{aligned} f(x-h_l) &= f(x) - h_l f'(x) + \frac{h_l^2}{2} f''(x) - \frac{h_l^3}{6} f'''(x) + \mathcal{O}(h_l^4), \\ f(x+h_r) &= f(x) + h_r f'(x) + \frac{h_r^2}{2} f''(x) + \frac{h_r^3}{6} f'''(x) + \mathcal{O}(h_r^4). \end{aligned}$$

Vi ønsker å sitte igjen med $f''(x)$ og høyere ordens ledd, og dette gir kravene:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ -ah_l + ch_r &= 0, \\ a\frac{h_l^2}{2} + c\frac{h_r^2}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Løsning av dette systemet gir

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{h_l^2 + h_l h_r}, \\ b &= -\frac{2}{h_l h_r}, \\ c &= \frac{2}{h_r^2 + h_l h_r}. \end{aligned}$$

For det neste leddet i Taylor-utviklingen får vi foran $f'''(x)$:

$$\begin{aligned} \left(-a\frac{h_l^3}{6} + c\frac{h_r^3}{6}\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{h_r^3}{h_r^2 + h_l h_r} - \frac{h_l^3}{h_l^2 + h_l h_r}\right), \\ &= \frac{1}{3}\frac{h_r^3 h_l - h_l^3 h_r}{h_r h_l (h_r + h_l)} = \frac{1}{3}\frac{h_l h_r (h_r + h_l)(h_r - h_l)}{h_l h_r (h_l + h_r)}, \\ &= \frac{1}{3}(h_r - h_l), \\ &= \frac{h}{3}(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Dvs. for $\alpha \neq \beta$ har vi en metode av orden 1.

c) Ligningene i u_{11} og u_{12} blir de samme som i **a)**. For u_{21} og u_{22} får vi hhv.

$$\frac{2}{h(h+h_2)}u_{11} + \frac{2}{h_1(h_1+h)}u_{20} + \frac{2}{h_2(h+h_2)}u_{31} + \frac{2}{h(h_1+h)}u_{22} - 2\left(\frac{1}{hh_2} + \frac{1}{hh_1}\right)u_{21} = 0,$$

$$\frac{2}{h(h+h_2)}u_{12} + \frac{2}{h(h+h_1)}u_{21} + \frac{2}{h_2(h+h_2)}u_{32} + \frac{2}{h_1(h+h_1)}u_{23} - 2\left(\frac{1}{hh_2} + \frac{1}{hh_1}\right)u_{22} = 0.$$

Totalt gir dette systemet:

$$
\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -\frac{1}{2}, \\
\frac{2}{h(h+h_2)}u_{11} - 2\left(\frac{1}{hh_2} + \frac{1}{hh_1}\right)u_{21} + \frac{2}{h(h_1+h)}u_{22} &= -\frac{2}{h_1(h_1+h)} - \frac{2}{h_2(h+h_2)}, \\
u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= -\frac{1}{2}, \\
\frac{2}{h(h+h_1)}u_{21} + \frac{2}{h(h+h_2)}u_{12} - 2\left(\frac{1}{hh_2} + \frac{1}{hh_1}\right)u_{22} &= -\frac{2}{h_2(h+h_2)} - \frac{2}{h_1(h+h_1)}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

a) For gitte a og b vil h for **Simpson's $\frac{3}{8}$-Metode** være mindre enn for **Simpson's $\frac{1}{3}$-Metode**, som gjør feilleddet mindre.
Svar: Sant

b) Dårlige initialgjettinger kan f.eks. gjøre at vi ikke får konvergens.
Svar: Sant

c) **Metode 1:**

$$\text{Feil} \simeq c_1 h$$

Metode 2:

$$\text{Feil} \simeq c_2 h^2$$

Oppnådd feil vil være avhengig av konstantene c_1 og c_2. Hvis f.eks. $c_1 << c_2$ kan vi ha situasjoner hvor **Metode 1** trenger færre steg enn **Metode 2**.
Svar: Ikke sant

d) Svar: Sant

e) En kubisk spline har $4n$ frihetsgrader og $4n-2$ betingelser. En naturlig kubisk spline har to ekstra betingelser $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$, som gir unik løsning.
Svar: Sant

f) Svar: Ikke sant