MA2501 Numeriske metoder

Vår 2010

Øving 4

Oppgave 1

a) Bruk Matlab-rutinen `potens.m` for å finne største egenverdi og tilhørende egenvektor til matrisen:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ 10 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Bruk $\mathbf{x}^{(0)} = [1,0,0]^T$ som startverdi. Kontroller svaret med Matlabs `eig`.

b) Gjenta eksperimentet i punkt **a)** med matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & 7 \\ -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

og med $\mathbf{x}^{(0)} = [1,1,1]^T$ som startverdi. Dette kommer antagelig til å gå galt. Hvorfor, og se om du kan rette feilen. Når alt virker, gjenta med startverdi $\mathbf{x}^{(0)} = [1,0,0]^T$. Hva er svaret etter ca. 20 iterasjoner, og hva er det etter 50? Forklar.

c) Skriv om `potens.m` slik at den bruker (forskjøvet) invers potensmetode for å finne egenverdier. Bruk den til å løse Computer Problem 8.4.4, s.369. Kontroller svarene.

Oppgave 2

a) Finn Lagrangeformen til interpolasjonspolynomet av lavest mulig grad som interpolerer tabellen

x	0	2	3	4
y	7	11	28	63

b) Verifiser at polynomene

$$p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21$$
$$q(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3$$

begge interpolerer punktene gitt i tabellen

x	1	2	3	4
y	2	1	6	47

Hvorfor motsier ikke dette entydighetsteoremet?

c) Løs oppgave 4.1.27 på side 149 i læreboka.

Oppgave 3

Oppgave 4.2.13 på s.162 i læreboka.

Oppgave 4

a) Vis at funksjonene $T_n(x)$, definert på intervallet $[-1, 1]$ ved

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots,$$

er polynomer av grad n som oppfyller rekursjonsformelen

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Dette er *Chebyshev polynomene*.

b) Plott funksjonen

$$w_n(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

for $t \in [-1, 1]$ for hvert av de tre tilfellene

1. $x_i = \cos((2i + 1)\pi/(2(n + 1)))$ - (Chebyshev noder, nullpunkt for T_{n+1})
2. $x_i = \cos(i\pi/n)$
3. $x_i = -1 + 2i/n$

der $i = 0, 1, \dots, n$. Bruk gjerne den vedlagte Matlab funksjonen (ligger på øvingssiden på fagets hjemmeside som `w.m`). F.eks. for $n = 3$ kan du plotte $w_n(t)$ basert på Chebyshev-nodene som følger

```
>> n=3
>> i=0:n
>> x=cos((2*i+1)*pi/(2*(n+1)))
>> [t,y] = w(x, [-1,1])
>> plot(t,y,'b-','LineWidth',2)
>> grid on
```