MA2501 Numeriske metoder

Vår 2010

Øving 7

Oppgave 1

Bestem konstantene a, b, c og d slik at formelen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

er eksakt for polynomer av så høy grad som mulig.

Oppgave 2

Vi har integrasjonsformelen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq f(-\alpha) + f(\alpha). \tag{1}$$

a) Hva blir α hvis (1) skal være eksakt for alle kvadratiske polynom? Hva med kubiske?

b) Finn α slik at (1) er eksakt for alle

$$f(x) = a + bx + cx^3 + dx^4.$$

c) Finn α slik at (1) er eksakt for alle

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i x^{2i-1} + cx^{2n}$$

Oppgave 3

En kvadraturformel er vanligvis gitt på formen

$$Q(f; a, b) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

hvor nodene $x_i \in [a, b]$. Kvadraturformelen er av presisjonsgrad m dersom

$$\int_{a}^{b} p(x)\mathrm{d}x = Q(p; a, b), \qquad \forall p \in \mathbb{P}_m.$$

a) Bruk metoden som er beskrevet på s. 230 til å konstruere en kvadraturformel $Q(f; -1, 1)$ med nodene $x_0 = -1, x_3 = 1$, og x_1, x_2 lik nullpunktene til $L_3'(x)$. Her er $L_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ det 3. Legendre-polynomet. Bestem metodens presisjonsgrad.

b) Ta utgangspunkt i kvadraturformelen du fant i **a)**, og bruk dette til å finne en tilnærmelse til integralet $\int_{t_j}^{t_j+h} f(t)\mathrm{d}t$. Bruk dette igjen til å konstruere en sammensatt kvadraturformel basert på

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_j+h} f(t)\mathrm{d}t, \quad t_j = a + jh, \quad h = \frac{b-a}{m}.$$

Finn også et uttrykk for feilen i den sammensatte formelen.
(Det kan vises at $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - Q(f,-1,1) = -\frac{2}{23625} f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [-1,1]$)

c) Bruk kvadraturformelen fra punkt **b)** med $m = 2$ til å finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Finn også en øvre grense for feilen.