MA2501 Numeriske metoder

Vår 2010

Øving 8

Oppgave 1

Bruk vedlagte MATLAB-program `skyt.m` til å løse randverdiproblemet

$$x'' + e^x = 0, \qquad x(0) = x(1) = 0$$

Oppgave 2

Gitt startverdiproblemet

$$x'' = -2t(x')^2, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = z.$$

Finn $\phi(z) = x(1)$, og bruk det til å løse randverdiproblemet

$$x'' = -2t(x')^2, \qquad x(0) = 1, \quad x(1) = 1 + \pi/4.$$

Hint: Sett $\psi = x'$ og løs startverdiproblemet analytisk.

Oppgave 3

(Eksamen SIF 5040 mai 2001)
La $u(x,t)$ være løsningen til adveksjons-diffusjonsligningen

$$\begin{aligned}
&u_t + au_x = bu_{xx} \\
&u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \qquad (t \geq 0) \\
&u(x,t) = g(x), \qquad (0 < x < 1).
\end{aligned}$$

Her er a, b positive konstanter.

Vi ønsker å finne numeriske løsninger til differensialligningen. La u_i^n være den numeriske tilnærmelsen til $u(x_i, t_n)$ hvor $x_i = i \cdot h$, $t_n = n \cdot k$ og h og k er gitt størrelser i x- og t-retningen til et uniformt gitter. Vi diskretiserer i x-retingen med sentral-differenser.

a) Bruk forlengs Euler i tidsdiskretiseringen, og sett opp et eksplisitt numerisk skjema.

Vis at under følgende stabilitetsbetingelser

$$k \leq h^2/(2b) \text{ og } h \leq 2b/a$$

oppfyller skjemaet maksimumsprinsippet, dvs.

$$\max_i |u_i^{n+1}| \leq \max_i |u_i^n|.$$

b) Bruk Baklengs Euler i tidsdiskretiseringen og sett opp et implisitt numerisk skjema.

Vis at skjemaet oppfyller maksimumsprinsippet hvis $h < 2b/a$. Forklar hvorfor denne betingelsen er mye bedre enn det tilsvarende for det eksplisitte skjemaet.

Oppgave 4

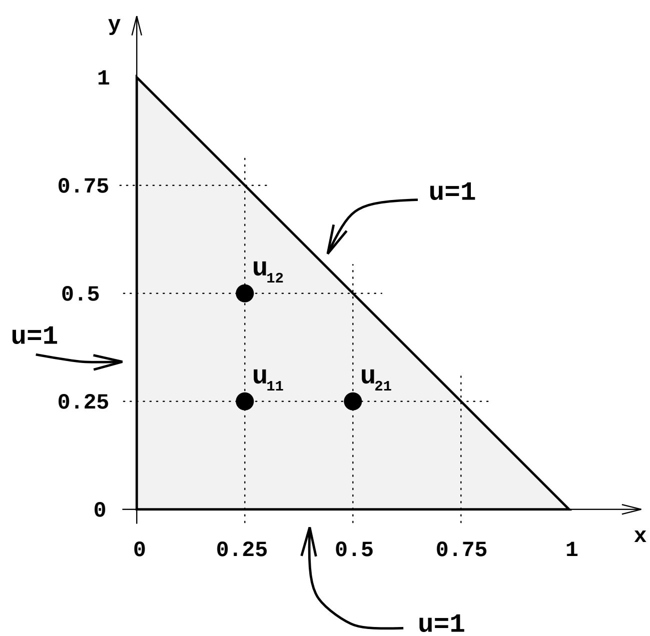
Løsningen til den partielle differensialligningen (Poissons ligning)

$$u_{xx} + u_{yy} = -1$$

i et område D, der $u(x, y)$ er gitt på randen til D, skal tilnærmes ved en differensemetode. Området D er gitt ved

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\} ,$$

og $u(x, y) = 1$ på randen. Vi bruker en skrittlengde $h = 1/4$, og lar u_{ij} være tilnærmelsen til $u(i \cdot h, j \cdot h)$. Se figuren.



a) Finn de tre ligningene som bestemmer u_{11}, u_{12} og u_{21} når sentraldifferenser benyttes for å tilnærme de deriverte.

Ligningssystemet i **a)** kan skrives på formen

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

der $\mathbf{A}$ er en 3×3 matrise, og $\mathbf{u}$ og $\mathbf{b}$ er vektorer.

b) La $\mathbf{u} = (u_{11}, u_{21}, u_{12})^T$ (naturlig ordning av de ukjente i vektoren $\mathbf{u}$). Finn $\mathbf{A}$ og $\mathbf{b}$. Løs ligningssystemet og finn u_{11}, u_{21} og u_{12}.