Prosjektoppgave - MA2501
Vår 2010

Oppgave 1

Vi skal se på initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) = \frac{2x}{t+1} - \frac{x^2}{(t+1)^3}, \quad t \in [0,T], \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

Vi vil benytte tre metoder for å løse dette problemet:

1) Forlengs Euler

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

2) Modifisert Euler

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{1}{2}hf(t_n, x_n)\right)$$

3) Eksplisitt Runge-Kutta

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, x_n)\\
k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right)\\
k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right)\\
k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3)\\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

a) Verifiser at (1) har eksakt løsning $x(t) = \frac{(t+1)^2}{1+\ln(t+1)}$.

b) Vi vet at Forlengs Euler er en første ordens metode og at den oppgitte Runge-Kutta metoden er av orden 4. Vis hvilken orden modifisert Euler har.

Implementer de tre metodene i Matlab. Dette kan f.eks. gjøres ved å lage tre funksjoner (en for hver metode), som tar som input T samt antall steg, N. Steglengden vil da være gitt som $h = \frac{T}{N}$.

c) Velg en T og beregn feilen for de tre metodene med ulike valg av N. (Start f.eks. med $h = 0.5$ og suksessivt halver h.) Plott feilen som funksjon av steglengden, h, og verifiser at implementasjonen oppfører seg som forventet for de tre metodene. (**Hint:** Bruk `loglog` i Matlab.)

d) Velg $T = 8$, og mål feilen for de tre metodene med $h = 0.5$. Basert på disse verdiene, estimer analytisk hvor mange iterasjoner som trengs med hver av de tre metodene får å oppnå en feil på 10^{-7}. Hvor mange funksjonsevalueringer tilsvarer dette for hver metode?

e) I Matlab kan man starte en stoppeklokke med kommandoen `tic` og stoppe med kommandoen `toc`. Sammenlign tidsbruken for de tre metodene når resultatet fra forrige punkt brukes (dvs. alle metodene bør gi en feil på ca. 10^{-7}). Sammenlign også tidsbruken for de tre metodene når samme antall steg brukes. Hvordan stemmer tidsmålingene med resultatet fra forrige oppgave hvis man antar at funksjonsevalueringer er den dominerende operasjonen?

Oppgave 2

Vi ønsker nå å løse problemet

$$x'' - 2(1 - x^2)x' + x = 0, \qquad x(0) = 2,\, x'(0) = 0. \tag{2}$$

a) Skriv om dette problemet til et system av første ordens ordinære differensialligninger. Hva blir initialbetingelsen for dette systemet?

For å løse dette systemet skal vi bruke følgende numeriske metode:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1})). \tag{3}$$

Denne metoden har feilledd $\mathcal{O}(h^2)$, og er et eksempel på en *implisitt* metode i og med at $\mathbf{f}$ evalueres i $\mathbf{x}_{n+1}$ i hvert tidssteg. $\mathbf{x}_{n+1}$ er derimot vektoren vi ønsker å finne, og dette betyr at vi må løse et (i dette tilfellet) ikke-lineært ligningsystem for hvert tidssteg. Vi vet at Newton's metode for system er et godt alternativ for løsning av slike problem.

b) Hvordan blir det ikke-lineære systemet som må løses for et gitt tidssteg? Hvilke initialbetingelser vil du bruke for løsning av dette systemet?

For dette problemet har vi ingen eksakt løsning tilgjengelig. Det vi derimot kan gjøre er å bruke en av Matlab's innebygde løsere til å løse problemet med høy nøyaktighet, og anse denne løsningen som eksakt løsning. Dette kan gjøres på følgende måte:

```
options = odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',[1e-10 1e-10]);
[t,xe] = ode45(@f,[t_s t_e],[x1_0; x2_0],options);
```

Her setter `options` nøyaktigheten man ønsker at løsningen skal ha. `f` er funksjonen som beskriver høyresiden i systemet. Den skal være gitt på formen:

```
function xd = f(t,x)
xd = zeros(2,1);
xd(1) = ...
xd(2) = ...
```

`@f` betyr at det er et *funksjonshåndtak* som sendes inn. `t_s` og `t_e` er starttid og sluttid `x1_0` og `x2_0` er initialverdier for systemet du fant i **a)**. `ode45` returnerer `t` som er en kolonnevektor (som vi på forhånd ikke vet lengden på) som inneholder verdier i [`t_s`, `t_e`] hvor løsningen er approksimert. `xe` inneholder to kolonnevektorer (hver med samme lengde som `t`) med approksimerte verdier for de tilhørende tidspunktene spesifisert i `t`. Det siste elementet, som tilsvarer løsningen ved tid `t_e`, kan da finnes ved `xe(numel(xe(:,1)),1)`.

c) Implementer metoden (3) og løs systemet (2) i intervallet $[0, 20]$. Vis at den implementerte metoden er av forventet orden.