Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 10

1 Bruk Lagrangeinterpolasjon for å finne et tredjegradspolynom som interpolerer punktene

x_j	-1	0	2	3
y_j	2	0	2	0

Beregn interpolasjonspolynomet i punktet $x = 1$.

2 **a)** Finn andregradspolynomet $p_2(x)$ som interpolerer funksjonen $f(x) = \sin(x)$ i punktene 0, $\pi/2$ og π. Bruk polynomet til å finne en tilnærmelse til $\sin(\pi/4)$.

b) Bruk feilformelen på side 800 (809) i Kreyszig til å finne en *øvre grense* for feilen, dvs. finn en M s.a.

$$|f(x) - p_2(x)| \le M \qquad \text{for} \quad \pi/2 \le x \le \pi.$$

c) Bruk polynomet til å finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^\pi \sin(x)dx.$$

Hvor stor er feilen?

3 Vis at polynomene

$$p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21,$$
$$q(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3$$

begge interpolerer punktene gitt i tabellen

x_j	1	2	3	4
y_j	2	1	6	47

Hvorfor motsier ikke dette entydighetsresultatet øverst på s. 798 (midt på s. 806)?

4 **a)** Lag tabeller over dividerte differenser for de to datasettene

x_j	0	1	4	6
$f(x_j)$	1	-1	1	-1

og

x_j	4	1	6	0
$f(x_j)$	1	-1	-1	1

b) Bruk resultatene fra **a)** til å finne interpolasjonspolynomene $p(x)$ og $q(x)$ for de to datasettene, og vis at disse to er identiske.

5 **MATLAB:** Oppgaven anbefales, men er ikke obligatorisk. Den blir ikke veiledet, det blir heller ikke gitt ut noe løsningsforslag til denne oppgaven.

Oppgaven går ut på å bruke polynominterpolasjon for å finne en tilnærmelse til en funksjon $f(x)$ over et intervall $a \leq x \leq b$. Bruk $n+1$ uniformt fordelte noder, dvs.

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1 \ldots, n, \quad \text{med} \quad h = (b-a)/n. \tag{1}$$

Last ned MATLAB-fila `lagrange.m`. Denne beregner interpolasjonspolynomet for et gitt datasett vha. Lagrange-interpolasjon. Skriv `help lagrange` får å se hvordan funksjonen brukes.

a) La

$$f(x) = \sin(x), \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Følgende MATLAB-kommandoer løser oppgaven for $n = 2$:

```
n = 2
a = 0, b = pi
x = linspace(a,b,n+1)          % Uniformt fordelte noder
y = sin(x)
t = linspace(a,b,101)';        % NB! Kolonnevektor.
p = lagrange(x,y,t);
plot(t,p)
```

For sammenligningens skyld vil du kanskje plotte funksjonen og polynomet samtidig:

```
plot(t,p,t,sin(t))
legend('p(x)','sin(x)')
```

Plott feilen $f(x) - p(x)$:

```
plot(t,sin(t)-p)
```

Gjenta dette for $n = 5, 10$ og 15.

b) Legg merke til at feilen $f(x) - p(x)$ er størst nær ytterpunktene av intervallet 0 og π. Det antyder at det kanskje kan være lurt å fordele nodene ujevnt, med flere noder nær kanten, og færre i midten. Det kan gjøres f.eks. ved å velge

$$x_j = \frac{b-a}{2} v_j + \frac{b+a}{2}, \qquad v_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

der $a = 0$ og $b = \pi$ i vårt tilfelle. Dvs: skriv f.eks.

```
n = 5
a = 0, b = pi
j = 0:n
v = cos((2*j+1)/(2*n+2)*pi)
x = (b-a)*v/2+(b+a)/2
```

Se hvordan nodene fordeler seg:

```
plot(x,zeros(n+1),'-*')
```

Gjenta punkt **a)** med disse nye nodene. Blir feilen mindre?

c) Gjenta punkt **a)** og **b)** på funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -5 \leq x \leq 5.$$

Gjør du denne oppgaven rett, bør du oppdage at (1) er et dårlig valg av noder i dette tilfellet, mens (2) fungerer rimelig bra.