Eksamen i	**: MA 21 - Abstrakt algebra**
Dato	**: 17. desember, 1994**
Varighet	: 6 timer
Antall vekttall	: 5

Tillatte hjelpemidler:
Ingen

Sensur: 9. januar, 1995

Oppgave 3 La $T: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ være lineæravbildningen gitt ved matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

med hensyn på standardbasisen i $\mathbf{R}^4$. La $\mathbf{R}[x]$ betegne polynomringen i én variabel x over de reelle tall $\mathbf{R}$. For $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ i $\mathbf{R}[x]$ og v i $\mathbf{R}^4$ definerer vi

$$f(x) \cdot v = f(T)(v) = a_0v + a_1T(v) + a_2T^2(v) + \cdots + a_nT^n(v).$$

Dette definerer en $\mathbf{R}[x]$-modulstruktur på $\mathbf{R}^4$, og i hele denne oppgaven betrakter vi $\mathbf{R}^4$ som $\mathbf{R}[x]$-modul på denne måten.

(a) La $v_1 = (1,0,0,0)$ og $v_2 = (-2,1,0,0)$ i $\mathbf{R}^4$. Det oppgies at vektorene v_1, v_2, $T(v_2)$ og $T^2(v_2)$ er lineært uavhengig i $\mathbf{R}^4$. Vis at v_1 og v_2 genererer $\mathbf{R}^4$ som $\mathbf{R}[x]$-modul.

Det oppgies at
$$T^3(v_2) - T^2(v_2) + T(v_2) - v_2 = 0$$
i $\mathbf{R}^4$. Vis at $T^n(v_2)$ er i underrommet av $\mathbf{R}^4$ generert av v_2, $T(v_2)$ og $T^2(v_2)$ for alle $n \geq 3$.

(b) Bruk (a) til å vise at det eksisterer en isomorfi
$$\mathbf{R}[x]/(x-1) \oplus \mathbf{R}[x]/((x-1)(x^2+1)) \simeq \mathbf{R}^4$$
som $\mathbf{R}[x]$-moduler.

(c) Finn den rasjonale kanoniske formen til A.

Oppgave 4 La R være en ring med 1. Anta at det eksisterer maksimale venstre ideal $\underline{m}_i$ i R for $i = 1, 2, \ldots, n$ slik at $\cap_{i=1}^n \underline{m}_i = (0)$.

(a) Vis at $R/\underline{m}$ er en simpel venstre R-modul når $\underline{m}$ er et maksimalt venstre ideal i R.

(b) Vis at R er en semisimpel ring.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

Oppgave 3.

(a) Enhver vektor v i $\mathbb{R}^4$ kan skrives på formen $v = a_0 v_1 + b_0 v_2 + b_1 T(v_2) + b_2 T^2(v_2)$ for $a_0, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Dermed er

$$v = a_0 \cdot v_1 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) v_2,$$

slik at ethvert element v i $\mathbb{R}^4$ kan skrives på formen

$$r(x) \cdot v_1 + s(x) \cdot v_2,$$

der $r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]$, dvs. $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}[x] \cdot v_1 + \mathbb{R}[x] \cdot v_2$ og $\{v_1, v_2\}$ er en generatormengde for $\mathbb{R}^4$ som $\mathbb{R}[x]$-modul.

Det er oppgitt at $T^3(v_2)$ er i underrommet W generert av $\{v_2, T(v_2), T^2(v_2)\}$. Anta at $T^{n-1}(v_2) \in W$, dvs. $T^{n-1}(v_2) = a_0 v_2 + a_1 T(v_2) + a_2 T^2(v_2)$. Da er

$$T^n(v_2) = T(T^{n-1}(v_2)) = a_0 T(v_2) + a_1 T^2(v_2) + a_2 T^3(v_2).$$

Siden $T^3(v_2) \in W$, så er $T^n(v_2) \in W$. Ved induksjon følger det at $T^n(v_2)$ er i W for alle $n \geq 3$.

(b) For en ring R og venstre R-modul M, definer $f_m : R \to M$ ved at $f_m(r) = ~~rm~~ rm$, der $r \in R$ og $m \in M$. Da er

$f_m(r+s) = (r+s)m = rm + sm$, M R-modul
$= f_m(r) + f_m(s)$,
$f_m(rs) = (rs)m = r(sm)$, M R-modul
$= r\, f_m(s)$,
slik at f_m er en R-homomorfi.

Definer $f: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ved at $f(r) = r \cdot v_1$ og $g: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ved at $g(r) = r \cdot v_2$. Av det over er f og g R-modul homomorfier. Av pkt. (b) har vi at $r \cdot v_2$ er i W for ethvert element $r \in \mathbb{R}[x]$. Siden $T(v_1) = v_1$, så er $r \cdot v_1 \in \mathbb{R} \cdot v_1$ for alle $r \in \mathbb{R}[x]$. Siden $v_1, v_2, T(v_2), T^2(v_2)$ er lineært uavhengig, så er $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^4$ og $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im}\, g = (0)$, slik at $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

Vi har at $(x-1) \cdot v_1 = T(v_1) - v_1 = v_1 - v_1 = 0$, slik at $(x-1) \subseteq \ker f$. La $h(x) \in \ker f$, da er $h(x) = q(x)(x-1) + a$ for en $a \in \mathbb{R}$. Da er
$$h(x) \cdot v_1 = q(x)((x-1)v_1) + av_1 = av_1 = 0,$$
slik at $a = 0$ og $\ker f \subseteq (x-1)$. Dermed er $\ker f = (x-1)$.

Vi har at $v_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $T(v_2) = (2, -1, 1, 0)$ og $T^2(v_2) = (-1, -1, -1, 1)$. og $T^3(v_2) = (-5, 1, -2, 1)$. Da er $T^3(v_2) - T^2(v_2) + T(v_2) - v_2 = 0$, dvs.
$$(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot v_2 = ((x-1)(x^2+1)) \cdot v_2 = 0.$$
og $((x-1)(x^2+1)) \subseteq \ker g$. For $h(x) \in \mathbb{R}[x]$, så er

$h(x) = q(x)(x-1)(x^2+1) + r(x)$, der $\deg r(x) \leq 2$, slik at $h(x) \in \ker g$ hvis og bare hvis $r(x) \in \ker g$. La $r(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Da er

$$r(x) \cdot v_2 = a_2 T^2(v_2) + a_1 T(v_2) + a_0 v_2 .$$

Siden $\{v_2, T(v_2), T^2(v_2)\}$ er lineært uavhengig, så må $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, slik at $\ker g = ((x-1)(x^2+1))$.

- Av isomorfisatsen ~~for~~ homomorfier har vi at $\operatorname{Im} f \cong \mathbb{R}[x]/(x-1)$ og $\operatorname{Im} g \cong \mathbb{R}[x]/((x-1)(x^2+1))$. Det følger av det ovenstående at

$$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}[x]/(x-1) \oplus \mathbb{R}[x]/((x-1)(x^2+1)).$$

(c) Av isomorfien i pkt. (b), så er de invariante faktorene til $A - xI$ polynomene $x-1$, $(x-1)(x^2+1)$. Dermed blir den rasjonale kanoniske formen til A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4

(a) Undermodulene i $R/\underline{m}$ er av formen $U/\underline{m}$ der U er en undermodul i R med $\underline{m} \subseteq U$. Siden $\underline{m}$ er et maksimalt v. ideal, så er $U=\underline{m}$ eller $U=R$. Det medfører at de eneste undermodulene av $R/\underline{m}$ er (0) eller $R/\underline{m}$., dvs. $R/\underline{m}$ er en simpel v. R-modul.

(b) Vi har at $\bigoplus_{i=1}^{n} R/\underline{m}_i$ er en semisimpel R-modul. De naturlige projeksjonene $\pi_i : R \longrightarrow R/\underline{m}_i$ er homomorfier av R-moduler, da vil

$$\varphi : R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/\underline{m}_i$$

gitt ved

$$\varphi(r) = (\pi_i(r))_{i=1}^{n}$$

være en homomorfi av R-moduler. Hvis $\varphi(r)=0$, så er $r \in \underline{m}_i$ for alle i, slik at $r \in \bigcap_{i=1}^{n} \underline{m}_i = (0)$. Dermed er $\ker \varphi = (0)$, slik at φ er en inklusjon. Siden en undermodul av en semisimpel modul er semisimpel, så er R en semisimpel v. R-modul, dvs. R er en semisimpel ring.

Eksamen i : **MA 321 - Abstrakt algebra**

Dato : **13. juni, 1996**

Varighet : 6 timer
Antall vekttall : 5

Tillatte hjelpemidler:
Ingen

Sensur: 4. juli, 1996

Alle svarene skal begrunnes.

Oppgave 1

(a) Gi sammenhengen mellom følgende klasser av ringer: kropper, integritetsområder, kommutative ringer, divisjonsringer, alle ringer. Angi hvilken klasse (klasser) følgende ringer tilhører: $\mathbf{Z}_9 = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}[x]$, $H = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbf{C}\}$ (den reelle kvaternionringen), $\mathbf{Q}$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{smallmatrix}\right)$, der $\mathbf{Z}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ og $\mathbf{R}$ betegner henholdsvis de hele tallene, de komplekse tallene, de rasjonale tallene og de reelle tallene.

(b) Gi ikke-trivielle eksempel på elementer som er: nilpotente elementer, idempotente elementer, invertible elementer, nulldivisorer (i en eller flere ringer, dvs. ikke nødvendig å finne én ring som har alle typer elementer).

EKSAMEN MA321, 13. juni 1996

Oppgave 1

(a) Kropper er kommutative divisjonsringer. En divisjonsring R er et integritetsområde, fordi: anta at $xy=0$, hvis $x\neq 0$ så eksisterer x^{-1} i R og $0=x^{-1}(xy)=(x^{-1}x)y=y$, dvs. $y=0$. Det følger av dette at R er et integritetsområde. Altså har vi følgende sammenhenger

$$\{\text{kropper}\} \subseteq \{\text{kommutative ringer}\} \subseteq \{\text{alle ringer}\}$$
$$\{\text{kropper}\} \subseteq \{\text{divisjonsringer}\} \subseteq \{\text{integritetsområder}\} \subseteq \{\text{alle ringer}\}$$

- $\mathbb{Z}_9$, kommutativ ring, ikke integritetsområde da $\bar{3}\cdot\bar{3}=0$ og $\bar{3}\neq\bar{0}$.

- $\mathbb{Q}[x]$ er et integritetsområde, siden $\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$, og $\mathbb{Q}$ er en kropp.

- H er en divisjonsring som ikke er en kropp.

- $\mathbb{Q}$ er en kropp.

- $\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ er en ikke-kommutativ ring og ikke et integritetsområde.

(b) La $R=\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$

Nilpotent: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, siden $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$

Idempotent: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siden $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Invertibelt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, siden $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

Nulldivisor: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=e$, $(1-e)e = e(1-e) = 0$ og $1-e\neq 0$.

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
DEN ALLMENNVITENSKAPELIGE HØGSKOLEN

Bokmål

Eksamen i : **MA 21 - Abstrakt algebra**

Dato : **4. desember, 1993**

Varighet : 6 timer timer
Antall vekttall : 5

Tillatte hjelpemidler:
Ingen

Sensur: 20. desember, 1993

Alle svarene skal begrunnes.

Oppgave 1

(a) Finn alle mulige invariante faktorer og rasjonale kanoniske former for 6×6-matriser over $\mathbb{Q}$ med minimalpolynom $(x-1)(x-3)^2$.

(b) La A være matrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Finn Smith-normal form av A over ringen $\mathbb{Z}$.

Oppgave 4 La F være en kropp og t et fiksert element i F. La R være underrommet av vektorrommet av alle 4×4-matriser over F gitt ved

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & ct & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

(a) Vis at R er en ring med 1, når addisjon og multiplikasjon er definert ved de vanlige matriseoperasjonene. Avgjør for hvilke elementer t i F ringen R er en kommutativ ring.

(b) Vis at

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & ct & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in F \right\}$$

er et ideal i R med $I^2 = (0)$ og at $R/I \simeq F[x]/(x^2)$.

Bokmål

(c) Avgjør om

(i) R er artinsk
(ii) R er noethersk
(iii) R er semisimpel

(d) Vis at et element $x = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & ct & b & a \end{pmatrix}$ i R er invertibelt hvis og bare hvis $a \neq 0$. Vis at

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & ct & b & 0 \end{pmatrix} \mid b, c, d \in F \right\}$$

er det eneste maksimale idealet i R.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.

MA21 – Abstrakt algebra – 04.12.93.

Oppgave 1

(a) La A være en 6×6-matrise over $\mathbb{Q}$ med minimalpolynom $(x-1)(x-3)^2$. La $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ i $\mathbb{Q}[x]$ være de invariante faktorene til A, der $f_i(x)$ er ikke-null ikke-enheter og $f_i(x) \mid f_{i+1}(x)$ (*) for $i = 1, 2, \dots, r-1$. Da er $f_r(x) = (x-1)(x-3)^2$. og $\prod_{i=1}^{r} f_i(x)$ er lik det karakteristiske polynomet til A opp til en enhet, som har grad 6. Siden de invariante faktorene skal tilfredsstille egenskapen (*) og produktet av de skal ha grad 6 har vi følgende muligheter

(I) $f_1(x) = x-1,\ f_2(x) = x-1,\ f_3(x) = x-1,\ f_4(x) = (x-1)(x-3)^2$

(II) $f_1(x) = x-3,\ f_2(x) = x-3,\ f_3(x) = x-3,\ f_4(x) = (x-1)(x-3)^2$.

(III) $f_1(x) = x-1,\ f_2(x) = (x-1)(x-3),\ f_3(x) = (x-1)(x-3)^2$
(IV) $f_1(x) = x-3,\ f_2(x) = (x-1)(x-3),\ f_3(x) = (x-1)(x-3)^2$
(V) $f_1(x) = x-3,\ f_2(x) = (x-3)^2,\ f_3(x) = (x-1)(x-3)^2$

(VI) $f_1(x) = (x-1)(x-3)^2,\ f_2(x) = (x-1)(x-3)^2$.

De tilhørende rasjonale kanoniske formene blir, siden $(x-1)(x-3)^2 = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$, $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ og $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$:

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (II) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (V) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(VI) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (IV) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(b) La A være matrisen $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

over $\mathbb{Z}$. Matrisen A kan ved elementære rad- og søyleoperasjoner over $\mathbb{Z}$ og ved å erstatte to elementer i en rad eller søyle med deres største felles divisor og 0 bringes over på formen $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$, der $a_i \neq 0$ og $a_i \mid a_{i+1}$ for $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Vi sier at A er ekvivalent med $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$, som kalles Smith-normal form av A.

Vi utfører følgende operasjoner på A

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = A_1} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1\left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = A_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right) A_2 = A_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) A_3 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Smith-normal form av A over $\mathbb{Z}$ er

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{\mathbb{Z}^2}.$$

Oppgave 4

(a) Det er nok å vise at R er en underring av ringen av alle 4×4-matriser over F. Det er gitt at R er et underrom av vektorrommet av alle 4×4-matriser $M_4(F)$, slik at R er en undergruppe av $M_4(F)$, dvs. hvis $a, b \in R$, så er $a-b \in R$. Mengden R er også en ikke-tom delmengde av $M_4(F)$. og enheten $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$ i $M_4(R)$ er med i R. Det er da nok å vise at hvis $a, b \in R$, så er også $ab \in R$ for å vise at R er en ring med 1. La

$$r = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & ct & b & a \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad s = \begin{pmatrix} a' & & & 0 \\ b' & a' & & \\ c' & 0 & a' & \\ d' & tc' & b' & a' \end{pmatrix}$$

Da er

$$r \cdot s = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 & 0 \\ ba' + ab' & aa' & 0 & 0 \\ ca' + ac' & 0 & aa' & 0 \\ da' + cb't + bc' + ad' & ca't + ac't & ba' + ab' & aa' \end{pmatrix}$$

som vi ser at ligger i R. Vi ser at det eneste uttrykket som ikke er symmetrisk i merket og umerket er elementet i nedre venstre hjørnet, slik at R er kommutativ hvis og bare hvis disse er like hverandre. Vi får

$$da' + cb't + bc' + ad' = d'a + c'bt + b'c + a'd,$$

som gir at
$$cb't + bc' = c'bt + b'c$$
og dermed
$$bc'(1-t) = b'c(1-t). \quad (*)$$
Dette må holde for alle valg av b, c, b', c' i F, f.eks. for $b = c' = 0$ og $b' = c = 1$. Det gir at $t = 1$. Så, hvis R er kommutativ, så er $t = 1$. Motsatt, hvis $t = 1$ så er R opplagt kommutativ da $*$ er oppfylt for alle b, c, b', c' i F. Altså har vi at R er kommutativ hvis og bare hvis $t = 1$.

(b) Definer $\varphi : R \longrightarrow F[x]/(x^2)$ ved at
$$\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & ct & b & a \end{pmatrix} \longmapsto \overline{a + bx}$$
Da har vi at:
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & tc & b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 & 0 \\ b' & a' & 0 & 0 \\ c' & 0 & a' & 0 \\ d' & tc' & b' & a' \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} a+a' & 0 & 0 & 0 \\ b+b' & a+a' & 0 & 0 \\ c+c' & 0 & a+a' & 0 \\ d+d' & (c+c')t & b+b' & a+a' \end{pmatrix}$$
$$= \overline{a+a' + (b+b')x}$$
$$= \overline{a+bx} + \overline{a'+b'x} = \varphi\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & tc & b & a \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} a' & & & 0 \\ b' & a' & & \\ c' & 0 & a' & \\ d' & tc' & b' & a' \end{pmatrix}$$

og ved å utnytte utregningen på side 10 får vi at

$$\varphi(r\cdot s) = \overline{aa' + (ba'+ab')x}$$

og

$$\varphi(r)\varphi(s) = \overline{(a+bx)}\,\overline{(a'+b'x)}$$
$$= \overline{aa' + (ba'+ab')x + bb'x^2}$$
$$= \overline{aa' + (ba'+ab')x}.$$

Vi har at

$$\varphi(1_R) = \varphi\begin{pmatrix}1 & & 0\\ 0 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} = \overline{1}\,,$$ slik

at φ er en homomorfi av ringer.

Gitt et element $\overline{f(x)}$ i $F[x]/(x^2)$, så kan det representeres av et første grads-polynom $a+bx$. Da vi

$$\varphi\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ 0 & 0 & a & \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix} = \overline{a+bx},$$

slik at φ er på.

Anta at

$$\varphi\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & c+t & b & d \end{pmatrix} = \overline{a+bx} = 0\,,$$

dvs. $a+bx \in (x^2)$. Det er mulig hvis og bare hvis $a=b=0$. Det vi si at $\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & c+t & b & a \end{pmatrix} \in \ker\varphi$ hvis og bare hvis

$\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & c+t & b & a \end{pmatrix} \in I$, slik at $\ker\varphi = I$.

Siden I er kjernen til en ringhomomorfi så er I et ideal. Videre får vi av fundamentalsetningen for ringhomomorfier at det induseres en isomorfi

$$R/\ker\varphi = R/I \cong F[x]/(x^2).$$

Idealet I^2 består av endelige summer av elementer av formen $r \cdot s$ hvor r og s er i I. Vi har at

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} c & 0 \\ d & ct \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} c' & 0 \\ d' & c't \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right) = 0,$$

slik at vi får at elementene i I^2 er summer av 0 elementet slik at $I^2 = (0)$.

(c) Ringen R er et vektorrom ~~over~~ kroppen F og ethvert venstre-/høyre-/ideal vil også være et vektorrom over F. Siden $\dim_F R = 4$, så kan vi høyst ha oppadstigende og nedadstigende kjeder av idealer av lengde 5 $((0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq I_4)$ slik at R blir både artinsk og noethersk. Siden R har et ikke-null nilpotent ideal, så er R ikke semisimpel av karakteriseringen av semisimple ringer.

(d) La $r = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & \\ c & 0 & 0 & \\ d & ct & b & 0 \end{pmatrix}$. Da er

$$r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ bc(t+1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ slik at } r^3 = 0$$

La $x = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ b & a & & \\ c & 0 & a & \\ d & ct & b & a \end{pmatrix}$. Hvis $a = 0$, så er elementet x nilpotent, slik at det kan ikke være invertibelt.

Anta at $a \neq 0$. Da kan x skrives som

$$a \cdot id_R + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & ct & b & 0 \end{pmatrix} = a \cdot id_R + r,$$

der $r^3 = 0$. Da har vi at

$$(a\, id_R + r)(1 - a^{-1}r + a^{-2}r^2)a^{-1}$$

$$= (a\, id_R + r - aa^{-1}r - a^{-1}r^2 + a^{-1}r^2 + a^{-2}r^3)a^{-1}$$
$$= a\, id_R a^{-1} = id_R$$

og tilsvarende

$$(1 - a^{-1}r + a^{-2}r^2)a^{-1}(a\, id_R + r) = id_R,$$

slik at x er et invertibelt element. Dette viser at x er invertibelt hvis og bare hvis $a \neq 0$.

La A være et ideal i R. Hvis A inneholder element $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & ct & b & a \end{pmatrix}$ med $a \neq 0$,

så vil $id_R \in A$ og $A = R$. Dette viser at ethvert ideal forskjellig fra R er inneholdt i mengden

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & ct & b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, b, c, d \in F \right\}.$$

Definer $\psi : R \longrightarrow F$ ved at

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & ct & b & a \end{pmatrix} \longmapsto a.$$

Det er lett å se av våre tidligere utregninger at dette er en ring-homomorfi som er på. Kjernen til denne avbildningen er opplagt. J, slik at vi får indusert en isomorfi

$$R/J \xrightarrow{\sim} F,$$

hvor F er en kropp. Følgelig er J et maksimalt ideal. Siden ethvert ideal er inneholdt i J, blir J det eneste maksimale idealet i R.