Lebesgueintegralet - en innføring

Harald E. Krogstad
Institutt for matematiske fag, NTNU

August 21, 2003

1 Innledning

Integralbegrepet er sentralt i matematisk analyse. I grunnkursene har vi møtt *Riemannintegralet*, definert som grensen av såkalte *Riemannsummer*. Riemannsummene ble laget ved å dele integrasjonsområdet opp i småbiter, multiplisere størrelsen på hver bit med en tilhørende funksjonsverdi og deretter summere. Vanligvis gikk summene mot en felles grense når bitene ble mindre og mindre, og denne grensen var Riemannintegralet. Slike konstruksjoner er fundamentale i integrasjonsteori. At en i praksis har en nær sammenheng med derivasjon og dermed en hendig måte å finne integraler på, er mer et heldig sammentreff.

Etterhvert har det vist seg at en trenger mange slags integraler, og at måten Riemann konstruerte integralet på er for snever. I 1904 revolusjonerte Henri Leon Lebesgue integrasjonsteorien ved å føre inn det som senere har fått navnet *Lebesgueintegralet*. Ved første øyekast synes det som om Lebesgueintegralet er en triviell omskrivning av Riemannintegralet, men dette er langt fra tilfelle.

Mange tror at den viktigste grunnen til å lære om Lebesgueintegralet er at en dermed kan løse flere integraler. Rettnok fins det Lebesgue-integrerbare funksjoner som ikke er Riemann-integrerbare, men dette er "sære" funksjoner uten noen som helst praktisk betydning. Dessuten gir begge integraltypene samme verdi for integraler der begge er definert.

Derimot fins det en rekke andre gode grunner for alle som har tenkt å sette seg dypere inn i f.eks. fourieranalyse, sannsynlighetsteori, stokastiske prosesser og kontrollteori til å ha noe bakgrunn i hva Lebesgueintegralet og den generelle *mål- og integrasjonsteorien* går ut på:

- Idéene som ligger til grunn for Lebesgueintegralet går igjen i mange andre og mer generelle integraltyper, f.eks. integraler en møter i teorien for stokastiske prosesser.
- Sannsynlighetsteorien får et solid grunnlag innenfor mål- og integrasjonsteori.
- Hilbert-rommene av funksjoner som dukker opp i mange anvendelser, trenger Lebesgueintegralet for å få en komplett beskrivelse.

- Lebesgueintegralet gjør det enkelt å avgjøre om grenser til følger av funksjoner kan integreres.
- Teorien for Lebesgueintegralet inneholder en rekke nyttige setninger for å snu på integrasjonsrekkefølgen, bytte summasjon og integrasjons-rekkefølge osv. I seriøse framstillinger er det ikke holdbart å skrive "hvis vi kan bytte om rekkefølgen på integralene, så...". Det forventes at en kan dokumentere at det er tillatt.
- I vitenskapelig litteratur vil ofte språkbruken fra mål- og integrasjonsteori betraktes som kjent.

Stoffet vi skal gå igjennom fins i en rekke lærebøker, og hører tradisjonelt med til det mest sentrale stoffet en lærer innenfor et videregående studium i matematikk. Selv om det har vært lagt ned et enormt pedagogisk arbeid på å gjøre teorien enklest mulig tilgjengelig, er det et beklagelig faktum at det enda er temmelig teknisk å gjennomføre alle bevis i detalj, og måten å argumentere på virker kronglete før en har kommet inn i den.

I dette notatet har vi av plasshensyn vært nødt til å ta lett på bevisene, og noen ganger har vi bare nøyd oss med å vise til litteraturen. Notatet er også sparsomt på oppgaver, men dette finnes i lærebøkene som det er vist til i litteraturlista.

Mer teoretisk interesserte studenter bør ellers være klar over at det ved NTNU gis kurs på master- og dr.ing.-nivå der stoffet her og mye annet blir gjennomgått på en mye grundigere og mer rigorøs måte.

Før du leser videre, kan det være lurt å tenke igjennom eller friske opp litt om

- Mengdelære: $\in, \subset, \cup, \cap$ etc.
- Grenser: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$
- $\max, \min, \sup, \inf$
- Riemannintegralet
- Kontinuerlige funksjoner

Prøv etterhvert som du leser å besvare spørsmålene i teksten der en ber om utfyllende argumenter.

Lykke til!

2 Grunnlaget for Lebesgueintegralet

Vi skal introdusere Lebesgueintegralet ved å gå tilbake til definisjonen av Riemannintegralet. Vi tenker oss at vi skal konstruere et integral av funksjonen f på et intervall $[a, b]$. Vi starter med å dele intervallet $[a, b]$ opp i N deler ved hjelp av punktene $(a = x_0, x_1, ..., x_{N-1}, x_N = b)$. Dette kalles en *partisjon*, $\mathcal{P}$, av intervallet. Vi vil la $\mathcal{P} \to \infty$ bety at $N \to \infty$ og $\max_i |x_i - x_{i-1}| \to 0$. Riemannintegralet av en funksjon f definert på intervallet $[a, b]$ er

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathcal{P}\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\tilde{x_i})(x_i - x_{i-1}) \; , \tilde{x_i} \in [x_{i-1}, x_i],$$

forutsatt at grensen eksisterer.

Idéen er altså noe upresist at en splitter "arealet" en skal finne opp i strimler, måler lengden og bredden på hver strimmel, multipliserer og summerer. Lebesgue gjorde dette på "snekkermåten": Først sorterte han alle strimlene i bunker der alle var omtrent like lange. Deretter målte han lengden på bunkene og talte opp hvor mange han hadde i hver bunke:

Lag først en partisjon av *verdimengden* til f,

$$\mathcal{Q} = \{\inf(f) = y_0, y_1, \cdots, y_N = \sup(f)\},$$

og definér en *Lebesgue-sum* for integralet av f over $[a, b]$ ved

$$S_{\mathcal{Q}} = \sum_{i=0}^{N} \tilde{y_i} m(A_i) + y_N \cdot A_{N+1},$$

der

$$\tilde{y_i} \in [y_{i-1}, y_i],$$

og

$$A_i = \{x; y_{i-1} \leq f(x) < y_i\} \; , A_{N+1} = \{x; f(x) = y_N\}.$$

Uttrykket $m(A)$ betyr det såkalte *målet* av mengden A. Målet av mengden er et uttrykk for størrelsen på mengden. Lebesgueintegralet kan defineres som grensen av slike summer når $\mathcal{Q} \to \infty$, og dette var omlag Lebesgues opprinnelige konstruksjon. Idag gjøres det noe annerledes som vi skal se.

Grunnen til at dette gir et mye mer generelt integral, er at målet kan gis en fornuftig mening selv for svært generelle mengder (Det fins matematikere som ikke uten videre går med på at en kan konstruere mengder av reelle tall som ikke er (Lebesgue-) målbare!).

2.1 Målet til mengder

Lebesguemålet (Eng.: *Lebesgue measure*) til en mengde generaliserer det vi kaller lengden til et intervall, for eksempel $|[a,b)| = b - a$. Matematisk er Lebesguemålet en funksjon der definisjonsmengden er en samling mengder og verdimengden er $[0, \infty]$. Målet kan altså godt være både 0 og ∞. I første omgang skal vi betrakte mengder på tallinjen, $\mathbf{R}$. Senere skal vi også definere målet for mengder i $\mathbf{R^n}$.

Innføringen av Lebesguemålet gjøres i flere trinn. Først bestemmes definisjonsmengden til målet, som altså er en samling mengder. Deretter defineres målet som en funksjon på disse mengdene, og til slutt må en vise at definisjonen er meningsfull. Alt dette er relativt teknisk, og vi skal nøye oss med en summarisk framstilling.

Definisjonsmengden til Lebesguemålet er en samling mengder som

1) inneholder alle intervallene

2) er lukket under

   - tellbare unioner
   - tellbare snitt
   - komplement

Denne samlingen av mengder kalles *Borelmengdene* som vi betegner med $\mathcal{B}$. Emile Borel var en annen fransk matematiker som deltok i utviklingen av målteorien.

Med en *tellbar* union menes enten $\cup_{i=1}^{N} A_i$ eller $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Tellbare snitt er definert tilsvarende. Med komplementet til A menes $\{x \in \mathbf{R}; x \notin A\}$. At $\mathcal{B}$ er *lukket*, betyr at det er umulig å danne mengder som ikke hører til $\mathcal{B}$ ved hjelp av tellbare unioner og snitt og komplementer av mengder i $\mathcal{B}$.

Begrepet tellbar (Eng.: *countable* eller *denumerable*) brukes ellers om antall elementer i mengder. Med en *tellbar* mengde menes en mengde der antallet elementer enten er endelig, eller vi kan sette opp elementene i en rekke, f.eks $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. De naturlige tallene er prototypen på en uendelig, men tellbar mengde, $\mathbf{N}= \{1, 2, 3, \cdots\}$. Ikke alle mengder er tellbare. For eksempel er de reelle tall ikke tellbare (Se Royden). Noe mer overraskende er det kanskje at *alle* rasjonale tall, $\mathbf{Q}$, er tellbare. Her er det nok å observere at alle rasjonale tall mellom 0 og 1 kan skrives opp i en rekke som følger: $1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, \cdots$. Vi har altså sortert tallene etter økende nevner og teller, men utelater de som allerede står i lista. (Hvordan kunne vi gå fram for å sette alle rasjonale tall opp i rekkefølge?).

Lebesguemålet til en mengde $A \in \mathcal{B}$ er nå definert som

$$m(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|,$$

der $\{E_n\}$ er en samling åpne intervaller slik at $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. En slik samling kalles en *overdekning* av A. "inf" skal tas over alle overdekninger av A. Målet til A er altså det største tallet som er mindre eller lik summen av lengdene på intervallene til enhver overdekning av A.

Hvis A selv er et intervall, vil $m(A) = |A|$ (Sjekk at dette er riktig også for lukkede og halvåpne intervaller. Hva med enkelt-punkter ?). Definisjonen leder til en del overraskende resultater, for eksempel at Lebesguemålet av de rasjonale tall er 0. Vi nevnte at denne mengden var tellbar, la oss si $\mathbf{Q}= \{q_1, q_2, \cdots\}$. Dekk i-te tall q_i med et åpent intervall E_i av lengde ϵ^i der ϵ er et lite, positivt tall. Etter definisjonen på Lebesguemålet vet vi at $m(\mathbf{Q})\leq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n = \epsilon/(1-\epsilon)$. Siden ϵ var et vilkårlig lite positivt tall, er eneste muligheten $m(\mathbf{Q})= 0$. Som vi forstår, vil alle tellbare mengder ha mål 0.

Ut ifra definisjonen kan en bevise følgende viktige egenskaper til Lebesguemålet av Borelmengder :

1 Målet er *translasjonsinvariant*: $m(A + r) = m(A)$, $r \in \mathbf{R}$ ($A + a$ betyr de x der $x - a \in A$)

2 Hvis $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ og $A_i \cap A_j = \emptyset$, så er $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

3 Hvis $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ og $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, så er $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$

4 Hvis $m(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ og $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, så er $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$

Disse egenskapene er ikke selvinnlysende, og det er en god øvelse å vise de fra definisjonen og fra hverandre.

Vi har alle, kanskje uten å være klar over det, møtt målbegrepet i sannsynlighetsregningen. Hendelsene er her assosiert med mengder i et såkalt utfallsrom, og samlingen av hendelser tilsvarer Borelmengdene. Sannsynligheten, $P(A)$, av en hendelse A er målet på A. Et slikt mål kalles et sannsynlighetsmål. I motsetning til Lebesguemålet vil et sannsynlighetsmål aldri ta større verdi enn 1. Hvis vi begrenser oss til trekking av uniformt fordelte tall på $[0, 1]$, vil Lebesguemålet gi oss et sannsynlighetsmål.

2.2 Målbare funksjoner og definisjonen av Lebesgueintegralet

Vi starter med å definere en samling funksjoner som vil vise seg å omfatte alle Lebesgue-integrable funksjoner. Vi sier at funksjonen f er (Lebesgue-)*målbar* hvis mengdene

$$\{x; \alpha \leq f(x) < \beta\}$$

er målbare for alle α og β, inklusive pluss og minus uendelig. Her er det underforstått at x tilhører definisjonsmengden til f, som selv kan være enhver målbar mengde. Funksjoner med komplekse verdier, er målbare hvis både real- og imaginærdelen er det.

Som vi skal se nedenfor, er ikke alle målbare funksjoner integrerbare, og dette kan virke forvirrende. Men det er en innarbeidet terminologi som det ikke enkelt å forandre på.

Akkurat som for mengder, viser det seg at klassen av målbare funksjoner blir svært stor. Spesielt gjelder at alle *kontinuerlige* funksjoner er målbare. Dette baserer seg på et relativt teknisk resonnement som vi ikke skal ta med her (Se Royden). En like fundamental egenskap er at grensen til en følge målbare funksjoner selv er en målbar funksjon: Hvis $f_1(x), f_2(x), \cdots$ er en følge målbare funksjoner og $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ eksisterer for alle

x, så er funksjonen g målbar. Videre kan det vises at hvis f og g er målbare, så er $f+g$, $f \cdot g$, αf, osv. målbare. Bevisene for dette er igjen relativt tekniske. Disse egenskapene gjør det temmelig vanskelig å tenke seg funksjoner som ikke er målbare.

Den *karakteristiske funksjonen* (også kalt indikatorfunksjonen), I_A, for en mengde A er definert ved at $I_A(x) = 1$ for $x \in A$, 0 ellers. Karakteristiske funksjoner til Borelmengder er målbare (hvorfor?).

Lebesgueintegralet til en karakteristisk funksjon er definert som målet av mengden:

$$\int I_A(x)dx = m(A).$$

(Alle integraler nedenfor er Lebesgueintegraler der ikke annet er angitt).

En *enkel funksjon* er en funksjon som består av en endelig sum av karakteristiske funksjoner multiplisert med konstante tall, for eksempel

$$s(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n I_{A_n}(x).$$

Lebesgueintegralet for positive, enkle funksjoner er definert som

$$\int s(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n m(A_n).$$

Notasjonen $\int f(x)dx$ henspeiler nå ikke lenger på selve konstruksjonen av integralet, men måten å skrive integral på er så innarbeidet at vi beholder den her også. Siden målet på mengder kan være ∞, tillater vi altså at integralet er ∞. Dessuten er det hensiktsmessig å tillate ∞ som funksjonsverdi.

Vi kan nå stille opp en generell definisjon av Lebegueintegralet for *positive, målbare* funksjoner. Lebesgueintegralet for den positive funksjonen f er definert som

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} m(\{x; \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}) + \infty \cdot m(\{x; f(x) = \infty\}).$$

I denne definisjonen lar vi alltid $0 \cdot \infty = 0$. Dette er nødvendig for at resultatet skal bli fornuftig hvis f.eks. $f(x) \equiv 0$ for alle x (a og b behøver ikke være endelige). Integralet er dessuten ∞ hvis $m(\{x; f(x) = \infty\}) > 0$.

Legg merke til at summene på høyre side ikke er annet enn Lebesgueintegralet til den positive enkle funksjonen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} I_{A_{nk}},$$

hvor de målbare (hvorfor?) mengdene A_{nk} er definert ved

$$A_{nk} = \{x; \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}.$$

Dette er en av mange ekvivalente definisjoner. Det er en typisk definisjon for ”etterpåkloke”, og naturligvis ikke Lebesgues opprinnelige definisjon!

Vi legger merke til at funksjonsfølgen $\{s_n\}$ vokser, $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$, for alle x og at den konvergerer mot $f(x)$ der $f(x) < \infty$. (Sjekk dette. Det er triksete å se!). Integralene av s_n må derfor, siden de også blir en voksende følge, konvergere mot et endelig positivt tall, eller gå mot $+\infty$.

En generell f kan skrives $f = f^+ - f^-$ der

$$f^+(x) = \max(f(x), 0),$$

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0).$$

Både f^+ og f^- blir målbare hvis f er det. Integralet av f defineres ved

$$\int f(x)dx = \int f^+(x)dx - \int f^-(x)dx$$

hvis minst ett av integralene på høyre side er forskjellig fra ∞ (I motsatt fall eksisterer ikke Lebesgueintegralet). En tilsvarende oppsplitting brukes også for integralet av funksjoner med komplekse verdier.

Vanligvis begrenser en seg til funksjoner der både $\int f^+(x)dx$ og $\int f^-(x)dx$ er endelige, og tilsvarende for komplekse funksjoner. Da vil $\int |f(x)|dx < \infty$ (Hvorfor?). Hvis dette tilfelle, sier en at funksjonen f er *integrerbar*. De integrerbare funksjonene utgjør altså en delmengde av de målbare.

Fra definisjonen følger en rekke elementære egenskaper til integralet:

1 Hvis f er integrerbar og $A \cap B = \emptyset$, vil $\int_{A \cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$

2 Hvis $\int |f(x)|dx = 0$, så vil $m(\{x; f(x) \neq 0\}) = 0$

3 Hvis $\int |f(x)|dx < \infty$, så vil $m(\{x; |f(x)| = \infty\}) = 0$

4 Hvis f og g er integrerbare og $f(x) \leq g(x)$, så er $\int f(x)dx \leq \int g(x)dx$

5 Hvis f er integrerbar, er αf integrerbar og $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \ \alpha \in \mathbf{R}$

6 Hvis f og g er integrerbare, er $f + g$ integrerbar og $\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Ifølge definisjonen vil f-s verdier på mengder med mål 0 ha ingen betydning for verdien på integralet (Hvorfor?). Dette er en viktig observasjon: Lebesgueintegralet for funksjoner som bare skiller seg fra hverandre på en mengde av mål null er det samme. Funksjonene $f(x) \equiv 0$ og $g(x) = 1$ for $x \in \mathbf{Q}, 0$ ellers, er like unntatt på $\mathbf{Q}$, dvs. en mengde av mål 0. Lebesgueintegralet av g er derfor 0. Eksisterer Riemannintegralet av g? (Nei, det gjør ikke det).

Siden en ofte har behov for å si at to funksjoner er like unntatt på en mengde av mål 0, har en innført følgende litt pussige notasjon:

$$f = g \ n.o.$$

Dette leses "f er lik g nesten overalt". I engelsk litteratur skriver en

$$f = g \ a.e.,$$

"almost everywhere".

Hvis både Riemannintegralet og Lebesgueintegralet eksisterer, har de samme verdi. Det er til og med mulig å vise at en integrabel funksjon er Riemannintegrerbar hvis og bare hvis den er begrenset og kontinuerlig *n.o.*. For å bestemme nøyaktig hvilke funksjoner som er Riemannintegrerbare, måtte en altså utvikle Lebesgueintegralet!

Det fins faktisk, noe søkt, funksjoner som er Riemannintegrerbare, men ikke Lebesgueintegrerbare: Riemannintegralet $\int_0^\infty (\sin(x)/x)dx$ eksisterer siden dette er definert som

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R (\sin(x)/x)dx.$$

Dette er strengt tatt noe som kalles et "uegentlig Riemannintegral". Lebesgueintegralet eksisterer formelt ikke siden f^+ og f^- ikke er integrerbare, men vi kunne jo ha definert et "uegentlig Lebesgueintegral" ved hjelp av en tilsvarende grense.

Som nevnt i innledningen, er det slett ikke for å kunne integrere flere funksjoner at ebesgueintegralet er nyttig. Derimot er konvergenssetningene i neste avsnitt helt sentrale.

3 Konvergenssetningene

Ved hjelp av Lebesgueintegralet kan det utledes en rekke nyttige setninger som en til stadighet har bruk for når en skal godtgjøre at grenser for funksjoner kan integreres, at integrasjonsrekkefølgen i et dobbeltintegral kan snus, eller at summasjons- og integrasjonstegn kan bytte plass. Setningene lar seg til en viss grad utledes fra hverandre. I dette notatet vil vi nøye oss med å skissere bevisene slik at spesielt interesserte kan fylle inn detaljer på egen hånd. Men som nevnt i innledningen, vil det hele nødvendigvis bli noe teknisk der en bør ha både begreper som "sup", "inf", $\cup$ og $\cap$ vel inne i fingrene.

Setningene som vi skal gå igjennom har analogier for uendelige summer som hadde vært kjent lenge før Lebesgueintegralet. Idag er det greit å huske på disse som "spesialtilfeller" av integrasjonssetningene.

Setningene gjelder ikke for Riemannintegralet, da en der har ingen garanti for at funksjonene en ender opp med virkelig kan integreres med Riemannintegralet.

Vi skal starte med en setning som er nær knyttet til definisjonen av Lebesgueintegralet, nemlig *Lebesgues monoton konvergens-teoren (MKT)* . Denne setningen gjelder for voksende følger av positive funksjoner.

Theorem 3.1 *La* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *være en voksende følge positive, målbare funksjoner,* $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$*, og la*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad , x \in [a,b].$$

(a og b behøver ikke være endelige, og dessuten tillater vi at grensen er $+\infty$)
Da er

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Bevis: Siden f er grensen til målbare funksjoner er den selv målbar, og siden $f_n(x) \le f(x)$, må nødvendigvis $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \alpha \le \int_a^b f(x)dx$. Hvis $\alpha = \infty$, er følgelig setningen riktig.

Anta at α er ekte mindre enn $\int_a^b f(x)dx$ (som likevel kunne være ∞). Vi ønsker å vise dette gir en selvmotsigelse. Gå tilbake til definisjonen av $\int_a^b f(x)dx$ og finn en r slik at vi for den tilhørende enkle funksjonen $s_r = \sum_{k=0}^{r2^r} k2^{-r} I_{A_{rk}}$ har at $\alpha + \epsilon < \sum_{k=0}^{r2^r} k2^{-r} m(A_{rk})$. Velg en $c < 1$ slik at en fremdeles har $\alpha + \epsilon \le \sum_{k=0}^{r2^r} (ck2^{-r}) m(A_{rk})$. Nå vil $cs_r(x)$ være ekte mindre enn $f(x)$ for alle x . Hvis vi derfor setter $E_n = \{x; f_n(x) \ge cs_r(x)\}$, vil $E_n \subset E_{n+1} \cdots$, og $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = [a,b]$ (Hvorfor får vi nødvendigvis med alle x-ene ?).

Følgende kjede av ulikheter fører nå til den selvmotsigelsen vi er ute etter:

$$\int_a^b f_n(x)dx \ge \tag{1}$$

$$\ge \int_{[a,b]\cap E_n} f_n(x)dx \ge \tag{2}$$

$$\ge \int_{[a,b]\cap E_n} cs_r(x)dx \ge \tag{3}$$

$$\ge \sum_{k=0}^{r2^r} (ck2^{-r}) m(A_{rk} \cap E_n) \ge \tag{4}$$

$$\ge \alpha + \epsilon/2 \tag{5}$$

når $n > N_0$. At det virkelig fins en slik N_0 følger av at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r2^r} (ck2^{-r}) m(A_{rk} \cap E_n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r2^r} (ck2^{-r}) m(A_{rk}) = \int_{[a,b]} cs_r(x)dx \ge \alpha + \epsilon$$

(Hvilken egenskap ved målet er det vi benytter her i grenseovergangen når $\cdots A_{rk} \cap E_n \subset A_{rk} \cap E_{n+1} \cdots$ og $\cup_{n=1}^{\infty} A_{rk} \cap E_n = A_{rk}$?)

Siden alle integralene av f_n er mindre eller lik α, kan dette ikke inntreffe, og følgelig må forutsetningen være feil.

Beviset overfor er snirklete, men ser ut til å være det enkleste som fins. Det er forøvrig er tatt fra boka til Rudin, Kap. 4, og er tatt med for å vise hvordan en argumenterer med utgangspunkt i definisjonene.

Den neste setningen er den aller mest anvendbare. Setningen kalles *Lebesgues dominert konvergensteorem (LDK)* og lar seg bevise rimelig enkelt fra MKT. Mens MKT dreide seg om positive funksjoner, kan LDK brukes for alle typer funksjoner. Beviset for komplekse funksjoner overlates til leseren etter at vi har vist setningen for *reelle* funksjoner. Integrasjonsgrensene, som ikke behøver å være endelige, er utelatt av bekvemmelighetshensyn.

Theorem 3.2 *La* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *være en følge reelle, målbare funksjoner som konvergerer punktvis mot en funksjon* f, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Anta at alle funksjonene er begrenset av en felles positiv, integrabel funksjon* h, *dvs.*

$$|f_n(x)| \leq h(x) \qquad \int h(x)dx < \infty.$$

Da er

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx.$$

Bevis: Sett $g_n = \inf_{n\leq m}(h - f_m)$. Da vil, fra MKT, $\lim_{n\to\infty} \int g_n(x)dx = \int h(x)dx - \int f(x)dx$. Sett videre $G_n = \inf_{n\leq m}(h+f_m)$. Da vil på tilsvarende måte, $\lim_{n\to\infty} \int G_n(x)dx = \int h(x)dx + \int f(x)dx$. Men

$$G_n(x) - h(x) \leq f_n(x) \leq h(x) - g_n(x).$$

Hvis vi integrerer dobbelt-ulikheten og lar $n \to \infty$, vil $\int f_n(x)dx$ klemmes mellom to skranker som begge konvergerer mot $\int f(x)dx$. Prøv om du er istand til å fylle ut detaljene!

Følgende setning har såvidt vi vet ikke noe navn, men den er ogsågrei å bruke i mange sammenhenger.

Theorem 3.3 *La* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *være en følge integrable funksjoner der*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|dx < \infty.$$

Da konvergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

absolutt for nesten alle x, *og summen,* $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, *oppfyller*

$$\int s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx,$$

og

$$\int |s(x)|dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|dx.$$

Bevis: Funksjonene $g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |f(x)|$ vokser monotont mot en funksjon G. Integralet av G er lik $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|dx < \infty$ (MKT!). Siden G er integrabel, er den også endelig *n.o.* Dermed har vi vist at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konvergerer absolutt *n.o.* Partsialsummene $s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f(x)$ er alle dominert av den integrable funksjonen G, og resten følger fra LDK.

4 Flerdimensjonale Lebesgueintegraler

Det flerdimensjonale Lebesgueintegralet er en direkte generalisering av det endimensjonale. Igjen starter en med å definere målbare mengder, Borelmengder, men istedet for intervaller går en ut fra kvadrater i planet og kuber i rommet, og tilsvarende i $\mathbf{R^n}$. Borelmengdene er nå som før lukket med hensyn på komplement, tellbare unioner og snitt. Dessuten vil f.eks. en mengde som $A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$, der A og B er Borelmengder i $\mathbf{R^n}$ og $\mathbf{R^m}$, være en Borelmengde i $\mathbf{R^{n+m}}$. I planet kan en dekke mengden med kvadrater når en skal definere målet, men resultatet blir det samme om en f.eks. i stedet hadde valgt sirkelskiver.

Definisjonen på en målbar funksjon er som før. Også her er det vanskelig å tenke seg en funksjon som ikke er målbar. Definisjonen av Lebesgueintegralet blir også den samme.

La oss for enkelthets skyld betrakte integraler over områder i planet, men setningene er riktige også i høyere dimensjoner. Av bekvemmelighetshensyn angir vi ikke integrasjonsområdet. Hvis vi skal integrere f over en mengde A, kan en likegodt integrere fI_A. Vi skriver dobbelt-integralet som

$$\int\int f(x, y)dxdy.$$

I elementærkurset lærte en hvordan en kunne beregne dobbelintegraler som *itererte enkeltintegraler*, f.eks.

$$\int_{x\in\mathbf{R}} \left(\int_{y\in\mathbf{R}} f(x, y)dy\right) dx.$$

Dette er altså *ikke* et dobbeltintegral: Integralet i den innerste parentesen er et vanlig enkeltintegral for hver verdi av x, og resultatet blir en funksjon av x som igjen kan integreres som et vanlig enkeltintegral.

Ofte vil en ha bruk for å bytte om på integrasjonsrekkefølgen, og for Lebesgueintegraler gjelder en svært enkel setning som essensielt sier at vi alltid kan gjøre dette forutsatt at funksjonene som inngår er *integrable.* Denne setningen kalles *Fubinis Teorem.*

Theorem 4.1 *Anta at f er en målbar funksjon på $\mathbf{R^2}$. Da vil alle funksjonene som betraktes nedenfor være målbare. Hvis ett av integralene*

$$\int\int |f(x, y)|dxdy \quad \int_x(\int_y |f(x, y)|dy)dx \quad \int_y(\int_x |f(x, y)|dx)dy$$

har endelig verdi, så har alle denne verdien og dessuten er

$$\int\int f(x, y)dxdy = \int_x(\int_y f(x, y)dy)dx = \int_y(\int_x f(x, y)dx)dy$$

Vi skal ikke ta med beviset for denne setningen, men henviser til bøkene av Rudin og Royden. Strengt tatt så vil, for eksempel, funksjonen $f(x, y)$ som funksjon av y generelt bare være målbar for nesten alle x, men dette er godt nok når vi etterpå integrerer m.h.p. x siden funksjonsverdiere på en mengde av mål 0 er uten betydning.

Alle ”praktiske” funksjoner vil være målbare, og hvis vi da kan bevise at f.eks.

$$\int_x \left(\int_y |f(x,y)| dy \right) dx < \infty,$$

sier teoremet at vi kan bytte om på rekkefølgen av integrasjonene. Hvis $\iint |f(x,y)|dxdy = \infty$, er det mulig å finne eksempler på at begge de itererte integralene eksisterer, men har forskjellig verdi (men de er ikke så enkle å lage).

Fubinis teorem gjelder også i høyere dimensjoner der en erstatter $\mathbf{R^2}$ med $\mathbf{R^{m+n}}$.

Det finnes en variant av Fubinis teorem for positive funksjoner der integralene tillates å være lik $+\infty$. Forutsatt målbarhet, vil alle integralene i konklusjonen ha lik verdi (og hvis ett er lik $+\infty$, er altså alle det). Dette kalles ofte *Tonellis teorem*.

5 Rom av Lebesgueintegrable funksjoner

I dette avsnittet er funksjonene definert på $\mathbf{R^n}$. Integralet over $\mathbf{R^n}$ skriver vi ganske enkelt som $\int f(x)dx$.

Hvis en multipliserer en Lebesgueintegrerbar funksjon med et tall, eller summerer to Lebesgueintegrerbare funksjoner, vil en igjen få en Lebesgueintegrerbar funksjon. For å vise at $f(x)+g(x)$ er integrerbar hvis f og g er det, bruker vi trekant-ulikheten, $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, og integrerer begge sider.

En samling vektorer, funksjoner o.l. som kan kombineres på denne måten, kalles i matematikken et *lineært rom*. Notasjonen kommer fra vektor-regningen. Lengden til en vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R^3}$ er definert som $|\boldsymbol{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ og avstanden mellom vektorene $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ er $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Dette avstandsbegrepet har egenskapene

1 $|\boldsymbol{x}| = 0$ hvis og bare hvis $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

2 $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$ hvis α er et tall

3 $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$

Disse egenskapene har dukket opp i så mange sammenhenger at matematikerne har funnet det hensiktsmessig å generalisere de til en abstrakt avstandsfunksjon som de kaller en *norm*. For vektorer er altså $|\ |$ en norm. Normen skrives generelt med doble vertikale streker,$\|\ \|$.

En norm på et lineært rom er altså en avstandsfunksjon med følgende egenskaper:

1 $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ hvis og bare hvis $\boldsymbol{x} = 0$

2 $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$ der α er et tall

3 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

Et lineært rom som har definert en norm, kalles et *normert rom.*

Vi skal nå se at rommet av Lebesgueintegrable funksjoner også kan gis en norm, *forutsatt at en ikke skiller mellom funksjoner som er like n.o.* . Vi definerer normen til en integrabel funksjon f som

$$\|f\| = \int |f(x)|dx$$

Egenskap 1) er riktig under forutsetningen ovenfor, 2) er opplagt, og 3) følger fra trekantulikheten som nevnt i innledningen (Det er vanlig å kalle 3) selv "trekant-ulikheten" for normer).

Samlingen av Lebesgueintegrerbare funksjoner med normen definert ovenfor betegnes med $\mathrm{L}^1(\mathbf{R^n})$, eller bare L^1. Dette rommet hører med til en hel familie rom som ofte blir studert, nemlig de såkalte $\mathrm{L^p}$*-rommene* . Rommet $\mathrm{L^p}$ består av målbare funksjoner f der $|f|^p$ er integrerbar og normen er definert ved

$$\|f\|_p = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Vi viser til litteraturen for beviset for trekant-ulikheten.

De viktigste $\mathrm{L^p}$-rommene er L^1, L^2 og L^∞. Rommet L^∞ skiller seg noe fra de andre og er definert ved at normen

$$\|f\|_\infty = \inf_\alpha \{\alpha; m(\{x; \alpha \leq |f(x)|\}) = 0\}$$

er endelig. Verdien $\|f\|_\infty$ kalles det *essensielle supremum* til f (Sjekk at dette er et fornuftig navn!). $\mathrm{L^p}$-rommene kan også defineres på delmengder av $\mathbf{R^n}$, for eksempel intervallet $[0, 1]$.

Vi skal gjennomgå noen av egenskapene til $\mathrm{L^p}$-rommene, og starter med den såkalte *kompletthet*.

En *Cauchyfølge* i et normert rom er en følge $\{f_n\}$ der elementene "klumper seg sammen" når n vokser. Matematisk uttrykkes dette som

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{n\leq m} \|f_m - f_n\| = 0.$$

Etterhvert som n vokser, ligger altså de etterfølgende elementene nærmere og nærmere f_n. Det er lett å forveksle en Cauchyfølge med en konvergent følge, men for at følgen skal være konvergent, må den konvergere *mot noe*, og det sier ikke definisjonen av en Cauchyfølge noe om. En følge er som konvergerer er imidlertid også en Cauchyfølge (Kan du se det?).

Et normert rom kalles *komplett* hvis enhver Cauchyfølge av elementer i rommet også konvergerer mot et element i rommet. Det at det iallefall fins en grense, gjør livet lettere i beviser og argumenter der en bruker Cauchyfølger.

Komplette normerte rom kalles *Banachrom* etter en polsk matematiker som utviklet denne teorien omkring 1930. Det er en av Lebesgueintegralets store triumfer at det gjør alle $\mathrm{L^p}$-rommene komplette. Vi skal kort skissere argumentet for L^1.

Theorem 5.1 *Rommene* $\mathrm{L^p}$ *er komplette, det vil si Banachrom.*

Beviside (for L^1*) :* La $\{f_n\}$ være en Cauchyfølge i L^1 . Vi skal vise at den konvergerer mot en funksjon i L^1. Fra definisjonen på en Cauchyfølge ser vi at vi kan finne en *delfølge* $\{f_{n_k}\}$ der

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \le 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

Sjekk at dette virkelig er mulig! La nå

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + f_{n_1}(x)$$

Etter teorem 3.3 konvergerer denne rekken absolutt mot $g(x)$ *n.o.*, og i tillegg gir samme teorem at g ligger i L^1. Funksjonen g er følgelig en kandidat. Siden

$$g(x) - f_{n_k}(x) = \sum_{q=k}^{\infty} f_{n_{q+1}}(x) - f_{n_q}(x),$$

gir teorem 3.3 også at $\lim_{k\to\infty} \|g - f_{n_k}\| = 0$. Beviset for at også $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$ overlates til leseren.

Beviset for de andre L^{p}-rommene, $p < \infty$, går tilsvarende, mens argumentet for L^∞ er noe enklere.

En mengde $\mathcal{G}$ i et normert rom er *tett* hvis enhvert element i rommet kan være grensen av Cauchyfølger fra $\mathcal{G}$. Dette er det samme som å si at det for et gitt element i rommet og en $\epsilon > 0$ fins en $g \in \mathcal{G}$ slik at $\|f - g\| < \epsilon$. Selv om funksjonene i L^1 kan være temmelig "stygge", er det ikke desto mindre familier av meget "pene" funksjoner som ligger tett i L^1. En slik familie er de kontinuerlige funksjonene.

Theorem 5.2 *De kontinuerlige, integrable funksjonene danner en tett mengde i* L^1.

Beviside: Dette er igjen et teknisk argument denne teorien er full av. Fra definisjonen på Lebesgueintegralet følger at enkle funksjoner ligger tett i L^1. Dette er i seg selv en nyttig observasjon! Enkle funksjoner er lineærkombinasjoner av karakteristiske funksjoner. Fra definisjonen på Lebesguemålet ser en at en vilkårlig karakteristisk funksjon kan approksimeres med endelige summer av karakteristiske funksjoner på intervaller. Det er lett å se at vi kan "runde av hjørnene" til den karakteristiske funksjonen, I_E, for et intervall slik at vi får en kontinuerlig funksjon, g, der $\|I_E - g\| < \epsilon$ når ϵ er et gitt lite, positivt tall. Dette gir oss resultatet.

Samme resultat gjelder også i L^{p} når $p < \infty$, men ikke for $p = \infty$ (Kan du vise det?). Siden kontinuerlige funksjoner er Riemannintegrerbare, ligger også Riemannintegrerbare funksjoner tett i L^{p} når $p < \infty$. Problemet oppstår når vi for eksempel har en følge av kontinuerlige funksjoner som konvergerer mot en eller annen grensefunksjon: Vi har generelt ingen garanti for at *denne* funksjonen er Riemannintegrerbar.

For en $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R^n})$ definerer vi den *translaterte funksjonen* f_y ved $f_y(x) = f(x - y)$. Neste teorem gir to enkle egenskaper til normen i $\mathrm{L}^1(\mathbf{R^n})$ som er nyttige i mange sammenhenger.

Theorem 5.3 *For alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R^n})$ og $y \in \mathbf{R^n}$ gjelder*

1 $\|f_y\| = \|f\|$

2 $\lim_{y\to 0} \|f_y - f\| = 0$

Beviside: Den første påstanden er opplagt. Den andre er i alle fall opplagt for karakteristiske funksjoner for intervaller. Siden endelige lineærkombinasjoner av slike er tette i $\mathrm{L}^1(\mathbf{R^n})$, holder påstanden for en tett delmengde i $\mathrm{L}^1(\mathbf{R^n})$. Nå kan enhver funksjon approksimeres med en funksjon fra den tette mengden, og siden påstand 1) allerede er bevist, følger påstand 2) (Skriv ut dette i detalj!).

Dette teoremet gjelder også for $\mathrm{L^p}$ når $p < \infty$, men ikke for $p = \infty$ (Hvorfor holder ikke 2) for L^∞ ?).

Rommet L^2 har en egenskap som skiller det fra alle de andre $\mathrm{L^p}$-rommene, det er nemlig et *Hilbertrom.* Et Hilbertrom er et lineært rom der vi har definert et *skalarprodukt.* I tillegg skal skalarproduktet definere en norm på rommet, og rommet skal være komplett med hensyn på denne normen.

Det vanlige skalarproduktet mellom vektorer i $\mathbf{R^3}$ er prototypen på et skalarprodukt. I L^2 er skalarproduktet definert ved

$$< f, g >= \int f(x)^* g(x) dx.$$

(Definisjonen varierer. "*" betyr kompleks konjugert, og noen bruker å kompleks-konjugere g istedenfor f). Vi ser at normen til $f \in \mathrm{L}^2$ nettopp blir

$$\|f\| = (\int f(x)^* f(x) dx)^{1/2} =< f, f >^{1/2} .$$

Hilbertrommene er de abstrakte rommene som "ligner mest" på det vanlige tredimensjonale rommet av vektorer. I *Funksjonalanalysen* lærer en om en rekke egenskaper til Hilbertrom. Siden vi nå har vist at L^2 er et Hilbertrom hvis vi benytter Lebesgueintegralet, kan vi uten videre bruke disse setningene for L^2. I Hilbertrom gjelder en meget viktig ulikhet som kalles *Schwarz's ulikhet.* I L^2-rommet får den formen

$$\int |f(x)^* g(x)| dx \leq (\int |f(x)|^2 dx)^{1/2} (\int |g(x)|^2 dx)^{1/2},$$

som vi også kan skrive

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Se om du er i stand til å vise Schwarz's ulikhet ved å se på integralet av funksjonen $(|f(x)| + \lambda |g(x)|)^2$ der λ varierer over alle reelle tall!

6 Litteraturhenvisninger

Det fins en rekke lærebøker om Lebesgueintegralet. Framstillingen her følger i store trekk boka til H. Dym og H.P. McKean: *Fourier Series and Integrals*, Acad. Press, 1972. Den er temmelig kortfattet, men kan godt brukes som supplement. Ellers er H.L. Royden: *Real Analysis*, Macmillan Company, 1963 og W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill 1970, velbrukte lærebøker som inneholder alle bevis skrevet ut i detalj. Av de mere avanserte lærebøkene er E. Hewitt og K. Stromberg: *Real and Abstract Analysis*, Springer, 1965, nærmest å regne som et oppslagsverk. Alle disse bøkene har velegnede øvingsoppgaver.