Vis at rekken

$$\sum_p 1/p$$

divergerer; her summerer vi over alle primtall $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...$

Vink. Anta det motsatte, det vil si at rekken konvergerer. Hvis vi nummerer primtallene $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...$, vil vi da for en tilstrekkelig stor N ha

$$S = \sum_{p > p_N} \frac{1}{p} < 1.$$

Vis at den konvergente rekken

$$S + S^2 + S^3 + S^4 + \cdots$$

kan skrives som summen av alle tall $1/n$, hvor n oppfyller et visst delelighetskriterium. (Siden alle ledd er positive, kan rekkene multipliseres sammen som om de var endelige summer, og vi trenger ikke å bekymre oss for i hvilken rekkefølge vi summerer.) Bruk så det du vet om den harmoniske rekken til å utlede en motsigelse.

Kommentar. *Primtallssatsen* sier at $\lim_{n\to\infty} p_n/(n \ln n) = 1$, så divergensen av vår rekke kan ses som en konsekvens av at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

divergerer. Men primtallssatsen er et vesentlig skarpere og dypere resultat enn det du er bedt om å utlede i denne oppgaven!